Espaces de Lebesgue

Exercice 1 Montrer que, si $f : X \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors il existe une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_n$ tels que
$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \chi_{A_n}(x)\,.$$
On pourra commencer par traiter le cas de fonctions à valeurs dans $[0,1[$.

Exercice 2 Montrer que le théorème de convergence monotone est équivalent au lemme de Fatou, au sens que l'on peut déduire l'un de l'autre. Montrer par un exemple que l'inégalité dans le lemme de Fatou peut être stricte.

Exercice 3 Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs complexes qui tend presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe g inégrable telle que, pour tout n, on ait $|f_n| \le g$ presque partout. En considérant la suite de fonctions $(2g - |f - f_n|)_n$, montrer que f est intégrable et
$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu\,.$$

Exercice 4 On rappelle que la mesure de Lebesgue est la seule mesure λ de $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$ fixé, invariante par translations telle que $\lambda([0,1]^n) = 1$.

1. Soit $T \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, on a $\lambda(TA) = \lambda(A)$.
2. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^n$, on a $\lambda(TA) = \lambda(A)|\det T|$.

Exercice 5 On se donne un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et deux réels conjugués $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient $a, b \ge 0$; montrer l'inégalité de Young :
$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$
Que peut-on dire du cas d'égalité ?
2. Soient f, g deux fonctions mesurables. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\lambda > 0$
$$\int_X |fg|\, d\mu \le \frac{\lambda^p}{p}\int_X |f|^p\, d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_X |g|^q\, d\mu.$$
Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Hölder :
$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p\, \|g\|_q.$$
Traiter le cas d'égalité. Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$?
3. Soit $p > 1$; en remarquant que $(a+b)^p = (a+b)(a+b)^{p-1}$ pour tous réels positifs a, b, montrer l'inégalité de Minkowski. Traiter les cas $p = 1$ et $p = \infty$.

Exercice 6 Soit f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On note N_f l'ensemble des $p > 0$ tel que $f \in L^p$.

1. Montrer que si $p \le r \le q$ alors $|f|^r \le |f|^p + |f|^q$; en déduire que N_f est un intervalle. Peut-on traiter aussi le cas $q = \infty$?

2. En prenant $X = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et μ la mesure de Lebesgue, on considère

$$f(x) = \frac{1 + x^a/|\log x|^b}{(x^a/|\log x|^b)(1 + x^c|\log x|^d)},$$

où $a, b, c, d \geq 0$. Calculer N_f en fonction des paramètres.

3. Soit $r = \alpha p + \beta q$, $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha + \beta = 1$; en appliquant l'inégalité de Hölder, montrer que $r \mapsto r \log \|f\|_r$ est continue et convexe sur N_f.

Exercice 7 Soient $p, q, r > 1$. Montrer que si $(1/r) = (1/p) + (1/q)$ alors $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, et, si $(1/p) + (1/q) + (1/r) = 1$ alors $\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r$. Généraliser aux cas $(1/r) = (1/p_1) + \ldots + (1/p_n)$ et $(1/p_1) + \ldots + (1/p_n) = 1$.

Exercice 8 Montrer que L^∞ est complet.

Exercice 9 Soient $p \geq 1$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables. Montrer que

$$N_p\left(\sum f_n\right) \leq \sum N_p(f_n)\,.$$

Exercice 10 Pour $p \geq 1$, on désigne par ℓ^p l'esnemble des suites $\underline{x} = (x_n)_{n \geq 0}$ à valeurs complexes telles que la série de terme générales $(|x_n|^p)_n$ est convergente. On note

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum |x_n|^p\right)^{1/p}\,.$$

On note ℓ^∞ l'espace des suites bornées et on note $\|\underline{x}\|_\infty = \sup\{|x_n|, \geq 0\}$ et c_0 le sous-espace des suites qui tendent vers zéro.

1. Montrer que ℓ^p est un espace vectoriel normé. On admettra qu'il est complet.
2. Montrer que si $p > q$ alors $\ell^p \subset \ell^q$ et $\ell^p \subset c_0$, et les inclusions sont strictes.
3. Soit $p \geq 1$; montrer que si $(\underline{x}^k)_k$ est une suite de ℓ^p qui tend vers $\underline{x}$ alors la convergence a aussi lieu dans ℓ^∞ et dans ℓ^q pour tout $q > p$.
4. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞

Exercice 11 Soit $p \geq 1$ et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge vers f pp. Montrer que s'il existe $g \in L^p$ telle que, pour tout n, $|f_n| \leq g$ pp, alors (f_n) tend vers f dans L^p.

Exercice 12 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On considère une suite (f_n) de fonctions mesurables qui tend vers f presque partout.

1. Montrer que
$$\|f\|_p \leq \liminf \|f_n\|_p\,.$$
En déduire que si (f_n) est bornée dans L^p alors f est aussi dans L^p. Montrer que l'inégalité stricte est possible.

2. On suppose dorénavant que $\lim \|f_n\|_p = \|f\|_p$ et on veut montrer que l'on a convergence dans L^p.
   (a) Montrer que pour tout borélien A, $\lim \|f_n \chi_A\|_p = \|f \chi_A\|_p$.
   (b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire $X = A \cup B \cup C$, avec A, B et C mesurables, de manière à ce que $\|f \chi_C\|_p \leq \varepsilon$, $\mu(B) \leq \varepsilon$ et $(f_n|_C)_n$ tend vers $f|_C$ uniformément.
   (c) Conclure.

Exercice 13 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable; on suppose qu'il existe $p_0 < \infty$ tel que $f \in L^{p_0}$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \,.$$

1. Montrer le résultat si $\|f\|_\infty = 0$. On supposera dorénavant que $\|f\|_\infty \neq 0$.
2. Pour $\alpha < \|f\|_\infty$, notons $E_\alpha = \{|f| \geq \alpha\}$ et montrer que $0 < \mu(E_\alpha) < \infty$. En déduire que

$$\liminf \|f\|_p \geq \alpha \,.$$

   Conclure dans le cas $f \notin L^\infty$.
3. On suppose maintenant $f \in L^\infty$. Montrer que

$$\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

   et conclure.

Exercice 14 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $f \in L^1$.

1. Montrer que si $0 < p < q$ alors $\|f\|_p \leq \|f\|_q$.
2. Montrer que pour tout $p \in]0, 1]$,

$$\int \log |f| d\mu \leq \frac{1}{p} \log \int |f|^p d\mu \leq \frac{1}{p} \int (|f|^p - 1) d\mu \,.$$

3. En déduire que

$$\lim_{p\to 0} \|f\|_p = \exp \int \log |f| d\mu \,.$$

4. On se fixe $p \in]0, 1[$. Est-ce que $\| \cdot \|_p$ définit une norme? Et $\| \cdot \|_p^p$?

Exercice 15 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure finie. On considère une suite (f_n) bornée dans L^2 qui converge presque partout vers une fonction f.

1. Montrer que f définit un élément de L^2.
2. On note, pour $n \geq 0$ et $\varepsilon > 0$,

$$F_n = \{x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \,.$$

   Montrer que $\mu(F_n)$ tend vers 0. On pourra considérer les ensembles $A_p = \cup_{n\geq p} F_n$.
3. Montrer que la suite (f_n) tend vers f dans L^1. On pourra écrire

$$\int |f - f_n| d\mu = \int_{F_n} |f_n - f| d\mu + \int_{X\setminus F_n} |f_n - f| d\mu \,.$$

4. Montrer, par un exemple, qu'on n'a pas forcément convergence dans L^2.
5. Montrer que pour tout $g \in L^2$, on a

$$\lim \int f_n \cdot g d\mu = \int f \cdot g d\mu \,.$$

Exercice 16 Soit $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ telle que $\int K(x,t)dt\le M$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, et $\int K(t,y)dt\le M$, pour tout $y\in\mathbb{R}$.

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $K(x,\cdot)f\in L^1$,

$$T(f)(x)=\int K(x,t)f(t)dt\,.$$

Soit $1\le p\le\infty$.

1. Soit $f\in L^p$. Montrer que $T(f)(x)$ est bien définie pour presque tout $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $T(f)\in L^p$.
2. Montrer que T est une application linéaire continue de L^p dans L^p.

Exercice 17 On rappelle que pour tout $x\in[0,1[$, il existe une unique suite $(\varepsilon_n)_{n\ge1}$ à valeurs dans $\{0,1\}$, dont les termes ne sont pas tous égaux à 1 à partir d'un certain rang telle que

$$x=\sum_{k\ge1}\frac{\varepsilon_k}{2^k}\,.$$

Le but de cet exercice est de montrer que pour presque tout $x\in[0,1[$, on a

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j=\frac{1}{2}\,.$$

Pour cela, on pose, pour $j\ge1$, $r_j(x)=1-2\varepsilon_j$.

1. Montrer que si on note $r_1:\mathbb{R}\to\{-1,1\}$ la fonction 1-périodique qui vaut 1 sur $[0,1/2[$ et (-1) sur $[1/2,1[$, alors, pour tout $k\ge0$, on a $r_k(x)=r_1(2^{k-1}x)$.
2. Soient $k\ge1$ et $p\in\{0,2^k-1\}$ et notons $I=[p/2^k,(p+1)/2^k[$. Montrer que $r_j(x)$ est constante sur I si $j\le k$ et que $\int_I r_j(x)dx=0$ si $j\ge k+1$.
3. Montrer que si $k_1<k_2<\ldots<k_m$, alors
$$\int_{[0,1[}r_{k_1}(x)r_{k_2}(x)\ldots r_{k_m}(x)dx=0\,.$$
4. Calculer
$$\int_0^1 S_n^4dx\quad\text{où}\quad S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}r_j(x)\,.$$
5. Montrer que la série de terme général $(S_n^4)_{n\ge1}$ est convergente et définit un élément de $L^1([0,1[)$.
6. En déduire que $S_n(x)$ tend vers zéro presque partout et conclure.