UNIVERSITE D'AIX-MARSEILLE **Agrégation de mathématiques**
Calcul différentiel **2019-20**

Calcul différentiel

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les dérivées directionnelles $f'_v(0,0)$ existent pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2 Soit $f : V \to \mathbb{R}^q$ une application où $V \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert.

1. On suppose que f est continue et qu'il existe un point $a \in V$ tel que f est différentiable en tout point $x \in V \setminus \{a\}$ et que $\lim_{x \to a} D_x f$ existe et définit donc une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f est différentiable au point a et $D_a f = L$.
2. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point $x \in V$ et qu'elles sont uniformément bornées sur V. Montrer que f est continue.
3. On suppose que f est lipschitzienne et qu'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ telle que, pour tout vecteur v, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = L(v)$$

   Montrer que f est différentiable au point a.

Exercice 3

1. Montrer que l'application $\mathrm{Inv} : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ définie par $M \to M^{-1}$ est de classe C^∞.
2. Calculer la différentielle de Inv au point I_n.
3. Calculer la différentielle de Inv en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Soit $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application qui à une matrice carrée d'ordre n associe son déterminant.

1. Montrer que det est de classe C^∞.
2. Calculer les dérivées directionnelles de det par rapport à chaque vecteur de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Donner l'expression de la différentielle de det. On pourra commencer par la différentielle au point I_n.

Exercice 5 Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable vérifiant

$$\exists k \in]0,1[\text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n, \|D_x g\| \leq k.$$

1. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} + g$ est injective.
2. Démontrer que l'image réciproque par f d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ est une partie bornée.

Exercice 6 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ tels que l'on ait $\|D_x f\| \leq k|f(x)|$, pour tout $x \in U$. Soit $a \in U$ tel que $f(a) \neq 0$. Montrer que pour x assez voisin de a, on a:

$$|f(x)| \leq e^{k\|x-a\|}|f(a)|.$$

Exercice 7 Montrer que $(0,0)$ est l'unique point critique de la fonction $f(x,y) = x^2 - xy^2$.

Montrer que f restreinte à toute droite passant par l'origine admet un minimum local en ce point, mais que $(0,0)$ n'est pas un minimum local de f.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2$$

Déterminer les points critiques de f et leur nature (extrema, points-selle).

Exercice 9 Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable. On suppose que f est deux fois différentiable au point $a \in U$. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On note $\varphi : U \to \mathbb{R}^p$ l'application définie par $\varphi(x) = D_x f(k)$. Montrer que φ est différentiable au point a et que $D_a\varphi(h) = D_a^2 f(h,k)$ (ce résultat permet de calculer plus simplement les différentielles secondes).

Exercice 10 On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (\cos x - \sin y, \sin x - \cos y).$$

1. Montrer $\|D_{(x,y)}F\| \leq \sqrt{2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que la suite récurrente définie par (x_0, y_0) et pour $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{\cos x_n - \sin y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{\sin x_n - \cos y_n}{2},$$

   converge pour tout (x_0, y_0).
3. Donner l'équation vérifiée par sa limite.

Exercice 11

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

   (a) Montrer que les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ existent en tout point.
   (b) Montrer que $\partial_1\partial_2 f(0)$ et $\partial_2\partial_1 f(0)$ existent et calculer-les.
   (c) Que peut-on dire de f?
2. Mêmes questions avec une fonction de la forme $f(x,y) = xyg(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0) = 0$, où g admet des dérivées partielles secondes en 0, et g vérifie

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right).$$

Exercice 12 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est suffisamment proche de I_n, alors il existe une matrice M telle que $M^2 = A$.

Exercice 13 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme. On veut montrer qu'il existe un voisinage V de I_n tel que, si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et $G \subset V$ alors $G = \{I_n\}$.

1. Montrer que l'application exp : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définit un difféomorphisme local d'un voisinage $B(0,r)$ de 0 sur un voisinage de I_n.
2. Montrer que si $A \in B(0, r/2)$, $A \neq 0$, alors il existe $k \geq 0$ tel que $kA \in B(0,r) \setminus B(0, r/2)$.
3. Conclure avec $V = \exp B(0, r/2)$.

Exercice 14 [Lemme de Morse]

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible fixée, et soit
$$F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, {}^tMA = AM\}.$$
   (a) On pose $\Omega = F \cap Gl_n(\mathbb{R})$. Montrer que c'est un ouvert de F et que l'application $\varphi : \Omega \to S_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tMAM$ est un C^∞-difféomorphisme local en I_n.
   (b) Montrer l'existence d'un voisinage V de A dans $S_n(\mathbb{R})$ et d'une application $h : V \to Gl_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ telle que $h(A) = I_n$ et telle que ${}^th(B)Ah(B) = B$ pour tout $B \in V$.
   (c) Montrer qu'il existe une application $g : V \to Gl_n(\mathbb{R})$ de classe C^∞ telle que pour tout $B \in V$, ${}^tg(B)Dg(B) = B$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à ± 1.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, qui est nulle en 0 et dont la différentielle est aussi nulle en 0. On suppose que la matrice hessienne de f en 0 est inversible. Montrer qu'il existe un C^∞-difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ défini sur un voisinage W de 0, et un entier r tels que pour tout $x \in W$,
$$f(x) = \varphi_1(x)^2 + \ldots + \varphi_r(x)^2 - \varphi_{r+1}(x)^2 - \ldots - \varphi_n(x)^2.$$

Exercice 15 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe, une application $f : U \to \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall (x,y) \in U \times U$ et $\forall t \in [0,1]$, on a:
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

1. On suppose f différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si, $\forall (x,y) \in U \times U$, on a :
$$f(x) \geq f(y) + D_yf(x-y).$$
2. On suppose f deux fois différentiable sur U.
   (a) Montrer que si f est convexe, alors:
$$\forall x \in U, \;\; \forall h \in \mathbb{R}^n, \;\; D_x^2 f(h,h) \geq 0.$$
   (b) Montrer réciproquement que si f est de classe C^2 sur U et vérifie que $\forall x \in U, \; \forall h \in \mathbb{R}^n, \; D_x^2 f(h,h) \geq 0$, alors f est convexe sur U.
3. On suppose que f est convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $D_a f = 0$, montrer que f a un minimum absolu au point a.
4. Soient $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice carrée réelle, symétrique, d'ordre n et $B \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par:
$$f(X) = \frac{1}{2}{}^tXAX - {}^tBX.$$
   Montrer que f est convexe si et seulement si A est une matrice positive, c'est à dire vérifie ${}^tXAX \geq 0, \;\; \forall X \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + a \sin y, y + b \sin x)$, où a et b sont des réels vérifiant $|ab| < 1$.

1. Démontrer que f est un difféomorphisme sur son image.
2. Démontrer que f est surjective. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin y + xy^4 + x^2$.

1. Montrer qu'il existe deux voisinages U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ ainsi qu'une fonction $\phi : U \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in U$, $\phi(x)$ est l'unique solution y de V de l'équation $f(x, y) = 0$.
2. Donner un développement limité de ϕ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

Exercice 18 Soit $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, que l'on munit de sa structure euclidienne canonique et considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ défnie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle x, b\rangle$$

où A est symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est strictement convexe et que f admet un unique minimum atteint en un point μ et dont on calculera la valeur (de μ et $f(\mu)$).
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et définissons $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$ où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et t_k est l'unique réel minimisant $t \mapsto f(x_k + td_k)$.
   (a) Que peut-on dire s'il existe un entier n tel que $d_n = 0$? On suppose dorénavant que $d_k \neq 0$ pour tout k.
   (b) Calculer t_k en fonction de d_k.
   (c) Montrer que
   $$f(x_{k+1}) - f(\mu) = (f(x_k) - f(\mu)) \cdot \left(1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle\langle Ad_k, d_k\rangle}\right).$$
   (d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
   $$\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle\langle Ad_k, d_k\rangle \leq \frac{\|x\|^4}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)$$
   où λ_1 et λ_n désignent la plus petite et la plus grande valeur propre de A. On pourra travailler dans une base adaptée.
   (e) En déduire que
   $$|f(x_{k+1} - f(\mu)| \leq |f(x_k) - f(\mu)|\left(\frac{\lambda_n/\lambda_1 - 1}{\lambda_n/\lambda_1 + 1}\right)^2$$
   et en déduire que $\lim f(x_k) = f(\mu)$.