Espaces L^p, convolution et espaces de Hilbert
Notes pour l'agrégation

P. Haïssinsky

October 24, 2019

Ces notes sont à lire avec précaution: elles sont susceptibles de contenir un nombre non négligeable de lacunes et d'erreurs. Attention !

1 Rappels

Le point de départ peut être l'image suivante. Prenons une pile de pièces de monnaie dont on veut déterminer la valeur. Une première méthode consiste à prendre les pièces une par une et d'en faire la somme ; l'intégrale de Riemann est basée sur cette idée. Une autre méthode consiste à d'abord rassembler les pièces de même valeur, de compter combien on a de pièces de chaque valeur, puis d'en faire la somme ; l'intégrale de Lebesgue est basée sur cette idée.

Pour la mettre en œuvre, on doit pouvoir mesurer des quantités dans notre exemple, compter les pièces). Etant donné un ensemble E, on cherche donc une application $\mu : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}_+$ qui associe un nombre à une quantité (une partie de E). Les propriétés qu'on attend sont les suivantes:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- Si A et B sont disjoints, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Afin d'avoir une théorie plus riche, permettant de faire des approximations, on demande aussi la propriété suivante :

- si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)\,.$$

Cependant, dans la plupart des cas intéressants, l'axiome du choix nous permet de montrer qu'il n'est pas possible de définir des mesures sur toutes les parties de E. La notion de tribu définit des collections de parties pour lesquelles on pourra construire de nombreuses mesures sans rencontrer de problèmes. Ce concept est aussi crucial en probabilités.

Définition 1.1 *Un espace mesuré est un triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ où*
– X est un ensemble,
– $\mathcal{A}$ est une tribu (i.e. $\mathcal{A}$ est une collection de sous-ensembles de X stable par passage au complémentaire et par unions dénombrables telle que $X \in \mathcal{A}$),
– μ est une mesure positive σ-additive sur la tribu $\mathcal{A}$ i.e., $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$, et si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)\,.$$

La mesure est dite σ-finie, s'il existe une suite $(X_n)_n \subset \mathcal{A}$ telle que $X = \cup X_n$ et $\mu(X_n) < \infty$ pour tout n.

Un espace topologique sera toujours muni de la tribu borélienne sauf mention contraire, c'est-à-dire muni de la plus petite tribu comprenant les ouverts.

On rappelle qu'une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est *mesurable* si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.2 *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs complexes.*

1. *Toute limite simple de $(f_n)_n$ est mesurable.*
2. *Si f_n est à valeurs réelles, alors les bornes supérieures et inférieures sont mesurables, les limites supérieures et inférieures aussi.*

De plus, la somme, le produit et la composée de fonctions mesurables sont mesurables

Si $f : X \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors il existe une suite croissante de fonctions étagées (f_n) qui tend simplement vers f. Il suffit de poser

$$f_n = n\chi_{\{f \geq n\}} + \sum_{k=0}^{n^2-1} \frac{k}{n} \chi_{\{k/n \leq f \leq (k+1)/n\}}\,.$$

En particulier, si f est à valeurs complexes, on peut trouver une suite (f_n) qui tend simplement vers f avec $(|f_n|)_n$ croissante.

Exercice 1.3 *Montrer que, si $f : X \to \mathbb{R}_+$ est mesurable, alors il existe une suite d'ensembles mesurables $(A_n)_n$ tels que*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \chi_{A_n}(x)\,.$$

On pourra commencer par traiter le cas de fonctions à valeurs dans $[0, 1[$.

Soit $f :: X \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On pose

$$\int_X f d\mu = \sup_{s \leq f} \sum_{1 \leq j \leq k} a_j \mu(A_j)$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions étagées $s = \sum_{1 \leq j \leq k} a_j \chi_{A_j}$ inférieures à f.

Si f est à valeurs complexes, on dit que f est *intégrable* si $|f|$ a une intégrale finie. En décomposant f sous la forme

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i[(\operatorname{Im} f)^+ - (\operatorname{Im} f)^-]$$

on définit

$$\int f d\mu = \int (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \left[\int (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - \int (\operatorname{Im} f)^- d\mu \right]$$

Insistons sur le fait que $\int f d\mu$ a toujours du sens si $\mu\{f < 0\} = 0$ et sinon, et si f est à valeurs complexes, on ne peut parler de son intégrale que si f est intégrable.

Les théorèmes suivants sont les théorèmes de convergence principaux.

Théorème 1.4 (de convergence monotone ou Beppo-Levi) *Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors*

$$\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu\,.$$

Lemme 1.5 (de Fatou) *Si (f_n) est une suite est une suite de fonctions mesurables positives, alors*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu\,.$$

Exercice 1.6 *Montrer que le théorème de convergence monotone est équivalent au lemme de Fatou, au sens que l'on peut déduire l'un de l'autre. Montrer par un exemple que l'inégalité dans le lemme de Fatou peut être stricte.*

Théorème 1.7 (de convergence dominée) *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs complexes qui tend presque partout vers une fonction f. S'il existe g inégrable telle que, pour tout n, on ait $|f_n| \leq g$ presque partout, alors f est intégrable et*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu\,.$$

Exercice 1.8 *Montrer le théorème de convergence dominée. On pourra considérer la suite de fonctions $(2g - |f - f_n|)_n$.*

2 Espaces L^p

2.1 Quelques inégalités

Valeur absolue.— Si $f : X \to \mathbb{C}$ est intégrable, alors

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

et on a égalité si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = |f(x)|e^{i\alpha}$ presque partout.

Inégalité de Jensen.— On suppose $\mu(X) = 1$; soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : X \to I$ une application intégrable et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors

$$\varphi\left(\int f d\mu\right) \leq \int (\varphi \circ f) d\mu\,.$$

Inégalité de Tchebycheff.—- Soit $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable, alors. pour tout $p \geq 1$ et tout $\lambda > 0$,

$$\mu(\{|f| \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda^p} \int |f|^p d\mu\,.$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où le terme de droite est fini. On a

$$\begin{aligned} |f|^p &\geq |f|^p \chi_{|f|<\lambda} + \lambda^p \chi_{|f|\geq\lambda} \\ &\geq \lambda^p \chi_{|f|\geq\lambda}\,. \end{aligned}$$

Par positivité de l'intégrale, il vient

$$\int |f|^p d\mu \geq \int \lambda^p \chi_{|f|\geq\lambda} d\mu \geq \lambda^p \mu(\{|f| \geq \lambda\})\,.$$

■

Inégalité de Hölder.—- Soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables. Soient $p, q > 1$ tels que $(1/p) + (1/q) = 1$ (on dit alors que p et q sont *conjugués*), alors

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q}\,.$$

On a égalité si et seulement si il existe $a, b \geq 0$ non nul simultanément tels que $a|f(x)|^p = b|g(x)|^q$ presque partout.

Sa démonstration s'appuie sur une autre inégalité, dite de Young: soient $a, b \geq 0$ et $p, q > 1$ tels que $(1/p) + (1/q) = 1$; alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

On a égalité si et seulement si $p \log a = q \log b$.

Démonstration. (Inégalité de Young) Cette inégalité découle de la convexité de la fonction exponentielle: pour $t \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tx + (1-t)y) \leq t \exp x + (1-t) \exp y\,.$$

On choisit $t = (1/p)$ de sorte que $(1-t) = (1/q)$, $x = p \log a$ et $y = q \log b$. On a égalité si et seulement si $p \log a = q \log b$. ■

Démonstration. (Inégalité de Hölder) Tout d'abord, si fg est nulle presque partout, alors l'inégalité est trivialement vraie. De même, si l'une des intégrales de droite est infinie et l'autre est non nulle, même conclusion.

On suppose maintenant que $fg \neq 0$ pp, et que les intégrales de droite sont finies et non nulles. On pose

$$F = \frac{|f|}{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad G = \frac{|g|}{\left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q}}$$

de sorte que

$$\int F^p d\mu = \int G^q d\mu = 1\,.$$

On applique l'inégalité de Young: pour tout x, on a

$$F(x)G(x) \leq \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}$$

donc, en intégrant,

$$\int FG d\mu \leq \frac{1}{p}\int F^p d\mu + \frac{1}{q}\int G^q d\mu\,.$$

Autrement dit,

$$\int \frac{|f|}{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}} \cdot \frac{|g|}{\left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q}} d\mu \leq 1$$

qui est l'inégalité recherchée. On a égalité si et seulement si

$$p \log F(x) = q \log G(x) \text{ pp.}$$

soit si et seulement si

$$\frac{|f|^p}{\int |f|^p d\mu} = \frac{|g|^q}{\int |g|^q d\mu}$$

■

Inégalité de Minkowski.—- Soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ mesurables et $p \geq 1$, alors

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Démonstration. Si $p = 1$, alors l'inégalité triangulaire et la positivité de l'intégrale montre l'inégalité de Minkowski. Supposons maintenant $p > 1$. Tout d'abord, la stricte convexité de $x > 0 \mapsto x^p$ montrer que si $a, b > 0$, alors $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$. Autrement si le terme de droite est fini, il en est de même de celui de gauche.

On a

$$\begin{aligned} |f+g|^p &= |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \\ &\leq |f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g| \end{aligned}$$

donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int |f+g|^p d\mu &\leq \int |f+g|^{p-1} \cdot |f| d\mu + \int |f+g|^{p-1} \cdot |g| d\mu \\ &\leq \left(\int |f+g|^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q} \cdot \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |f+g|^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q} \cdot \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q} \cdot \left\{\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}\right\} \end{aligned}$$

car $q(p-1)=p$. On peut simplifier et obtenir

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

■

2.2 Définitions

Définition 2.1 *Pour $p \geq 1$, l'espace $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ désigne les fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ telles que*

$$N_p(f) := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty .$$

C'est un espace vectoriel complexe d'après l'inégalité de Minkowski. De manière plus élémentaire, en utilisant, pour $a, b \in \mathbb{C}$,

$$|a+b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq 2^p\,(\max\{|a|,|b|\})^p \leq 2^p\,(\max\{|a|^p,|b|^p\}) \leq 2^p(|a|^p+|b|^p)\,,$$

on obtient

$$N_p(f+g) \leq 2(N_p(f)^p + N_p(g)^p)^{1/p} .$$

L'inégalité de Hölder, de son côté, montre que si $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$ avec p, q conjugués, alors $(fg) \in \mathcal{L}^1$ et

$$\left|\int (fg) d\mu\right| \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^q d\mu\right)^{1/q} .$$

On a égalité si et seulement si il existe $a, b \geq 0$ non nul simultanément tels que $a|f(x)|^p = b|g(x)|^q$ presque partout et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)g(x) = |f(x)g(x)|e^{i\alpha}$ presque partout.

Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{C}$ est *essentiellement bornée* s'il existe une constante M telle que $\mu\{|f| \geq M\} = 0$. L'infimum de ces constantes est notée $N_\infty(f)$.

Définition 2.2 *L'espace $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ désigne l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.*

On remarque que l'inégalité de Hölder reste vraie si $p=1$ et $q=\infty$, et l'inégalité de Minkowski est aussi vérifiée pour $p=\infty$.

L'inégalité de Tchebycheff implique que $N_p(f)=0$ si et seulement si $f=0$ pp. De même, $N_\infty(f)=0$ si et seulement si $f=0$ pp. On définit alors la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble des fonctions mesurables: $f \sim_n g$ si $f=g$ pp. Deux représentants d'une même classe ont même intégrale.

Définition 2.3 *Pour $p \in [1,\infty]$, on pose $L^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu)/\sim_n$. Il s'agit des classes de fonctions mesurables p-intégrables et on pose $\|f\|_p = N_p(g)$, où $g \in \mathcal{L}^p$ représente $f \in L^p$.*

Remarque 2.4 *Un élément de L^p n'est pas une fonction, mais une classe. Cela signifie que l'on ne peut parler de propriétés que dans les deux situations suivantes: (a) une propriété est vraie pour tout représentant dans $\mathcal{L}^p$; (b) il existe un représentant pour lequel la propriété est vraie. Dans chaque cas, il convient de savoir de quelle situation il s'agit, et de faire attention aux abus de langage.*

Comme l'intégrale ne dépend pas du représentant, on peut parler d'intégrale d'une classe de L^p. D'ailleurs c'est tout ce dont on peut parler: la valeur en un point d'une classe de L^p n'existe pas. Cependant, elle existe pour une fonction $f \in \mathcal{L}^p$.

Proposition 2.5 *L'espace L^p muni de $\| \cdot \|_p$ est un espace vectoriel normé.*

Démonstration. Soient $f_j, g_j \in \mathcal{L}^p$, $j = 1, 2$ telles que $f_1 \sim_n g_!$, $f_2 \sim_n g_2$ et soit λ un scalaire. On se donne des ensembles de mesure nulle E_1 et E_2 de sorte que $f_j = g_j$ sur ${}^cE_j$, $j = 1, 2$. Posons $E = E_1 \cup E_2$, qui est de mesure nulle puisque $\mu(E) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$. Par ailleurs, on vérifie que $f_1 + \lambda f_2 = g_1 + \lambda g_2$ en dehors de E, impliquant que L^p est bien un espace vectoriel.

Vérifions que $\| \cdot \|_p$ est une norme. Si $\|\bar{f}\|_p = 0$ alors, pour tout représentant f, on a $N_p(f) = 0$, donc $f \sim_n 0$ et $\bar{f} = 0$. Les autres propriétés se vérifient sans malice, grâce à l'inégalité de Minkowski.

■

Définition 2.6 *Si X est un espace topologique localement compact, on définit, pour $p \in [1, \infty]$, l'espace $\mathcal{L}^p_{loc}(X, \mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que, pour tout compact $Y \subset X$, $f|_Y \in \mathcal{L}^p(Y, \mu)$ et on pose $L^p_{loc}(X, \mu) = \mathcal{L}^p_{loc}(X, \mu)/ \sim_n$. Il s'agit des classes de fonctions mesurables localement p-intégrables.*

Convergence simple/convergence presque partout.— Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables, on dit que (f_n) tend vers f presque partout s'il existe un ensemble E de mesure nulle tel que $(f_n(x))_n$ tend vers $f(x)$ pour tout $x \notin E$. Si (f_n) tend vers f pp. et si $g_n \sim_n f_n$ et $g \sim_n f$, alors (g_n) tend aussi vers g pp. En effet, notons E_n l'ensemble des x tels que $f_n(x) \neq g_n(x)$, E celui tel que $f(x) \neq g(x)$ et F l'ensemble des points x tels que $(f_n(x))_n$ ne tend pas vers $f(x)$. Alors, d'une part $(\cup E_n) \cup E \cup F$ est de mesure nulle, et d'autre part, $(g_n(x))_n$ tend vers $g(x)$ hors de $(\cup E_n) \cup E \cup F$.

Par conséquent, on peut parler de convergence presque partout pour des suites de L^p, car cette propriété ne dépend pas des représentants choisis.

Par ailleurs, avec les mêmes notations, si on pose $g_n = g = 0$ sur F, alors on a convergence simple partout: on peut donc choisir des représentants pour lesquels la convergence a lieu partout.

Remarque 2.7 *Il est parfois pratique de considérer les fonctions mesurables comme prenant leurs valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. Notez que dans ce cas, elles ne forment plus un espace vectoriel puisque nous ne pouvons pas donner sens à "$+\infty - \infty$". Cependant, si $f \in \mathcal{L}^p$, alors, $\{|f| = \infty\} = \cap_n \{|f| \geq n\}$ donc l'inégalité de Tchebycheff implique $\mu\{|f| = \infty\} = 0$, et, quitte à changer ses valeurs sur un ensemble négligeable, on se ramène à une fonction qui ne prend que des valeurs finies.*

Théorème 2.8 (Egoroff) *Soit (X, μ) un espace mesuré de mesure finie. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables qui tend vers f presque partout, alors, pour tout $\eta > 0$, il existe un ensemble mesurable $A \subset X$ avec $\mu(X \setminus A) < \eta$ tel que $(f_n|_A)_n)$ tend vers $f|_A$ uniformément.*

Démonstration. Soit N l'ensemble négligeable des points pour lesquels $(f_n(x))_n$ ne tend pas vers $f(x)$ et posons $Y = X \setminus N$. Posons. pour $k, n \geq 1$,

$$E_{n,k} = \cap_{p \geq n} \{|f_p - f| \leq (1/k)\}\,.$$

A k fixé, $(E_{n,k})_n$ est croissante. Comme (f_n) tend vers f sur Y, cela signifie que pour k fixé, pour tout $x \in Y$, il existe n_x tel que $x \in E_{n,k}$ dès que $n \geq n_x$. Par conséquent, $Y = \cap_k \cup_n E_{n,k}$.

Fixons-nous $\eta > 0$; pour chaque k, on a $\lim_{n\to\infty} \mu(Y \setminus E_{n,k}) = 0$ (car μ est finie et la suite des complémentaires est décroissante), donc il existe n_k tel que $\mu(Y \setminus E_{n_k,k}) \leq \eta/2^k$. Posons

$$A = \cap_k E_{n_k,k}$$

Par σ-sous-additivité, on a

$$\mu(X \setminus A) \leq \mu(N) + \sum_k \mu(Y \setminus E_{n_k,k}) \leq \sum_k \eta/2^k \leq \eta$$

et, pour tout $x \in A$, on a $x \in E_{n_k,k}$ donc, si $p \geq n_k$, $|f_p(x) - f(x)| \leq (1/k)$: la convergence est uniforme. ∎

Convergence forte ou L^p.— On dit qu'une suite $(f_k)_k$ de L^p tend vers f si

$$\lim \|f - f_k\|_p = 0\,.$$

Les questions naturelles qui se posent sont de comparer les différents types de convergence: forte, presque partout, uniforme, etc.

Exercice 2.9 *Soit (X, μ) un espace métrique mesuré. Soit (f_k) une suite de L^p tendant fortement vers une fonction $f \in L^p$. Montrer que si $g \in L^q$. $1/p + 1/q = 1$, alors*

$$\lim \int f_k g d\mu = \int f g d\mu\,.$$

2.3 Propriétés

Théorème 2.10 (de convergence dominée de Lebesgue pour les espaces L^p) *Soit $p \geq 1$. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge vers f pp. S'il existe $g \in L^p$ telle que, pour tout n, $|f_n| \leq g$ pp, alors (f_n) tend vers f dans L^p.*

Démonstration. Cela découle du théorème de convergence dominée puisque

$$|f - f_n|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq 2^p g^p\,.$$

∎

Théorème 2.11 (Riesz-Fischer) *Pour tout $p \geq 1$, l'espace vectoriel normé $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.*

Corollaire 2.12 *L'espace L^2 est un espace de Hilbiert.*

Démonstration. En effet, la norme L^2 est associée au produit hermiten

$$f \cdot g = \int f\bar{g} d\mu \, .$$

■

Proposition 2.13 *Pour tout $p \geq 1$, si (f_n) est une suite de L^p qui tend vers $f \in L^p$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge vers f pp.*

Lemme 2.14 *Soit (u_n) une suite dans $\mathcal{L}^p$, $p \geq 1$, telle que*

$$\sum N_p(u_n) < \infty \, .$$

Alors la série de terme général $(u_n(x))_n$ est absolument convergente pour presque tout x et définit un élément $u \in \mathcal{L}^p$ tel que $\lim N_p(u - \sum_{0 \leq k \leq n} u_k) = 0$.

Démonstration. On pose

$$s_k = \sum_{j=0}^{k} |u_j| \, .$$

L'inégalité de Minkowski montre que (s_k^p) est une suite croissante de $\mathcal{L}^1$ et, par convergence monotone, on a

$$\int \lim s_k^p d\mu \leq \left(\sum \|u_k\|_p \right)^p \, .$$

donc la série de terme général $(|u_n|)_n$ définit un élément de $\mathcal{L}^p$. Notons $s = \lim s_k$.

L'intégrabilité de s^p et l'inégalité de Tchebycheff impliquent que la série est finie pour presque tout x. On en déduit que puisque la série de terme général $(u_k(x))_k$ est absolument convergente pour presque tout x, elle convergente pour presque tout x aussi. Notons $u(x)$ sa somme si elle est finie et posons $u(x) = 0$ sinon.

On remarque, que, pour tout $n \leq k$, on a

$$\left| \sum_{n \leq j \leq k} u_j \right| \leq \sum_{n \leq j \leq k} |u_j| \leq s$$

donc le théorème de convergence dominée implique

$$\int |u|^p d\mu \leq \int |s|^p d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \int \left| \sum_{k \geq n} u_k \right|^p = 0$$

ce qui nous permet de conclure d'une part que $u \in \mathcal{L}^p$ et $\lim N_p(u - \sum_{k \geq n} u_k) = 0$. ■

Démonstration. (Prop. 2.13) Si (f_n) tend vers f dans L^p alors, pour tout $k \geq 1$, il existe n_k tel que $\|f_n - f\|_p \leq 2^{-(k+1)}$ si $n \geq n_k$; donc on a $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 2^{-k}$. Donc le lemme 2.14 montre que la série de terme général $(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})_k$, en prenant f_{n_1} comme premier terme, converge dans L^p vers $f \in L^p$. ■

Le théorème de Riesz-Fischer se montre de manière similaire:

DÉMONSTRATION. (Riesz-Fischer) Soit (f_n) une suite de Cauchy. On construit une sous-suite (f_{n_k}) par récurrence telle que $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 2^{-k}$ pour tout k. Il existe d'abord n_0 tel que $\|f_i - f_j\|_p \leq 1$ pour tous $i, j \geq n_0$. Supposons n_k construit; il existe $n_{k+1} \geq n_k + 1$ tel que, si $i, j \geq n_{k+1}$ alors $\|f_i - f_j\|_p \leq 2^{-(k+1)}$. Par construction, nous avons donc $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq 2^{-k}$. Donc le Lemme 2.14 montre que la série de terme général $(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})_k$, en prenant f_{n_1} comme premier terme, converge dans L^p vers $f \in L^p$. On montre ensuite que la suite entière tend vers f, puisque c'est une suite de Cauchy. ■

Exercice 2.15 *Montrer que L^∞ est complet.*

Exercice 2.16 *Soient $p, q, r > 1$ tels que $(1/r) = (1/p) + (1/q)$. Montrer que $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, et $\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_s$, où s est le conjugué de r. Généraliser au cas $(1/r) = (1/p_1) + \ldots + (1/p_n)$.*

Exercice 2.17 *Soient $p \geq 1$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables. Montrer que*

$$N_p\left(\sum f_n\right) \leq \sum N_p(f_n)\,.$$

Exercice 2.18 *Soit f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On note N_f l'ensemble des $p > 0$ tel que $f \in L^p$.*

1. *Montrer que si $p \leq r \leq q$ alors $|f|^r \leq |f|^p + |f|^q$; en déduire que N_f est un intervalle. Peut-on traiter aussi le cas $q = \infty$?*

2. *En prenant $X = \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et μ la mesure de Lebesgue, on considère*

$$f(x) = \frac{1 + x^a/|\log x|^b}{(x^a/|\log x|^b)(1 + x^c|\log x|^d)},$$

   où $a, b, c, d \geq 0$. Calculer N_f en fonction des paramètres.

3. *Soit $r = \alpha p + \beta q$, $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha + \beta = 1$; en appliquant l'inégalité de Hölder, montrer que $r \mapsto r \log \|f\|_r$ est continue et convexe sur N_f.*

Exercice 2.19 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable; on suppose qu'il existe $p_0 < \infty$ tel que $f \in L^{p_0}$. Le but de cet exercice est de montrer que*

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty\,.$$

1. *Montrer le résultat si $\|f\|_\infty = 0$. On supposera dorénavant que $\|f\|_\infty \neq 0$.*

2. *Pour $\alpha < \|f\|_\infty$, notons $E_\alpha = \{|f| \geq \alpha\}$ et montrer que $0 < \mu(E_\alpha) < \infty$. En déduire que*

$$\liminf \|f\|_p \geq \alpha\,.$$

   Conclure dans le cas $f \notin L^\infty$.

3. *On suppose maintenant $f \in L^\infty$. Montrer que*

$$\limsup \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Exercice 2.20 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On considère une suite (f_n) de fonctions mesurables qui tend vers f presque partout.*

1. *Montrer que si (f_n) est bornée dans L^p alors*
$$\|f\|_p \leq \liminf \|f_n\|_p \,.$$
Monter que l'inégalité stricte est possible.

2. *On suppose dorénavant que $\lim \|f_n\|_p = \|f\|_p$ et on veut montrer que l'on a convergence dans L^p.*
   (a) *Montrer que pour tout borélien A, $\lim \|f_n \chi_A\|_p = \|f\chi_A\|_p$.*
   (b) *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire $X = A \cup B \cup C$ tel que $\|f\chi_C\|_p \leq \varepsilon$, $\mu(B) \leq \varepsilon$ et $(f_n|_C)_n$ tend vers $f|_C$ uniformément.*
   (c) *Conclure.*

Exercice 2.21 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est bornée supérieurement, c'est-à-dire qu'il existe $M < \infty$ telle que, pour tout $Y \in \mathcal{A}$ de mesure finie, on a $\mu(Y) \leq M$.*

1. *Montrer qu'il existe un ensemble Y de mesure finie et de mesure maximale. On note $Z = X \setminus Y$.*
2. *Montrer que si $1 \leq p \leq q$, alors $L^q \subset L^p$. Donner la meilleure constante C telle que $\|f\|_p \leq C\|f\|_q$ pour toute fonction mesurable f. On pourra montrer que si $f \in L^p$, alors $\|f\chi_Z\|_p = 0$.*
3. *Montrer que l'inclusion ci-dessus caractérise les mesures bornées supérieurement (on pourra considérer des combinaisons dénombrables de fonctions indicatrices d'ensembles disjoints de mesure finie mais au moins égale à 1 afin de construire un contre-exemple).*

Exercice 2.22 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe $m > 0$ telle que, pour tout $Y \in \mathcal{A}$ de mesure non nulle, on a $\mu(Y) \geq m$.*

1. *Montrer que si $1 \leq p \leq q$, alors $L^p \subset L^q$. Donner la meilleure constante C telle que $\|f\|_q \leq C\|f\|_p$ pour toute fonction mesurable f.*
2. *Montrer que l'inclusion ci-dessus caractérise les mesures bornées inférieurement (on pourra considérer des combinaisons dénombrables de fonctions indicatrices d'ensembles disjoints de mesure tendant exponentiellement vite vers 0 afin de construire un contre-exemple).*

Exercice 2.23 *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $L^p = L^q$, avec $p \neq q$. Montrer que tous les espaces L^p sont de dimension finie, et décrire la tribu $\mathcal{A}$.*

Exercice 2.24 *Soit $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ telle que $\int K(x,t)dt \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\int K(t,y)dt \leq M$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction mesurable, on pose, pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $K(x, \cdot)f \in L^1$,

$$T(f)(x) = \int K(x,t)f(t)dt\,.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$.

1. *Soit* $f \in L^p$. *Montrer que* $T(f)(x)$ *est bien définie pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $T(f) \in L^p$.
2. *Montrer que* T *est une application linéaire continue de* L^p *dans* L^p.

Exercice 2.25 (Inégalité de Hardy) *Soit* $p > 1$. *On note* $L^p = L^p(]0,\infty[, \mathcal{B}(]0,\infty[, \lambda)$, *où* λ *désigne la mesure de Lebesgue. Soit* $f \in L^p$. *Pour* $x > 0$, *on pose*

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f d\lambda\,.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $F \in L^p$ *et* $\|F\|_p \leq (p/(p-1))\|f\|_p$.

1. *On suppose que* f *est continue à support compact dans* $]0,\infty[$.
   (a) *Montrer* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et p-intégrable. Montrer que*
   $$xF'(x) = -F(x) + f(x)$$
   pour tout $x > 0$.
   (b) *On suppose de plus que* $f \geq 0$. *Montrer que*
   $$\int F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int F^{p-1}(x)f(x)dx$$
   et
   $$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p\,.$$
   (c) *En déduire l'inégalité pour toutes les fonctions continues à support compact.*
2. *On ne suppose plus* f *à continue à support compact.*
   (a) *Montrer qu'il existe une suite* $(f_n)_n$ *de fonctions continues à support compact dans* $]0,\infty[$ *qui tend dans* L^p *vers* f.
   (b) *Montrer que* F *est continue,p-intégrable et* $\|F\|_p \leq p/(p-1)\|f\|_p$.
3. *Montrer que*
   $$\sup\left\{\frac{\|F\|_p}{\|f\|_p},\ f \in L^p, \|f\|_p \neq 0\right\} = \frac{p}{p-1}\,.$$
   On pourra considérer la suite $(f_n)_n$ *définie par*
   $$f_n(t) = t^{-1/p}\chi_{]1,n[}(t)\,.$$

2.4 Dualité

Exercice 2.26 *Soient* $p, q \in [1, \infty]$ *tels que* $(1/p) + (1/q) = 1$ *et* $g \in L^q$. *Montrer que l'application*

$$\begin{aligned} L \ : \ & L^p \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \int fg \end{aligned}$$

définit une forme linéaire continue de norme

$$\|L\| := \sup\{|L(f)|,\ \|f\|_p = 1\} = \|g\|_q .$$

Définition 2.27 *Soient* $p, q, \in [1, \infty]$ *conjugués (i.e.* $(1/p) + (1/q) = 1$*). Une suite de fonctions* $(f_n)_n$ *de* L^p *converge faiblement vers* f *dans* L^p *si, pour tout* $g \in L^q$, *on a*

$$\lim \int f_n g d\mu = \int f g d\mu .$$

Pour distinguer la convergence en norme dans L^p de la convergence faible, la convergence en norme dans L^p est aussi appelée convergence forte dans L^p. La convergence forte entraîne la convergence faible.

Exercice 2.28 *Soient* $p \geq 1$ *et* (f_n) *une suite convergente faiblement vers* f *dans* L^p.

1. *Montrer que*
$$\|f\|_p \leq \liminf \|f_n\|_p .$$

2. *Montrer que l'inégalité stricte est possible. On pourra considérer la suite* (f_n) *définie par* $f_n = \sqrt{n}\chi_{[0,(1/n)]}$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 2.29 *Pour tout* $p \geq 1$, *le dual (continue) de* L^p *s'identifie canoniquement à* L^q, *où* q *est conjugué de* p*: pour toute forme linéaire continue* $F : L^p \to \mathbb{C}$, *il existe* $g \in L^q$ *telle que, pour tout* $f \in L^p$,

$$F(f) = \int f g d\mu .$$

Remarque 2.30 *Le dual de* L^∞ *n'est pas* L^1.

Théorème 2.31 *Pour tout* $p > 1$, *les espaces* L^p *sont réflexifs.*

3 Produit de convolution

Dans cette partie, nous travaillons sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Nous utiliserons la propriété fondamentale suivante:

Théorème 3.1 *Pour tout $p \geq 1$, l'espace des fonctions continues à support compact est dense (pour la norme L^p) dans L^p.*

Cette propriété découle de la régularité de la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire, pour tout borélien A et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset A$ et un ouvert $U \supset A$ tels que $\lambda(U \backslash K) < \varepsilon$. On a aussi besoin de construire des fonctions à support compact. Dans la littérature, on invoque souvent le lemme d'Urysohn qui est un résultat technique lorsque la seule hypothèse de l'espace est d'être normal. Cependant, en général, nous travaillons dans des espaces métriques; dans ce contexte, le résultat est immédiat, et ne mérite peut-être pas le nom de "lemme d'Urysohn".

Lemme 3.2 *Soient F_0, F_1 deux fermés disjoints d'un espace métrique X. La fonction $\varphi : X \to [0,1]$ définie par*

$$\varphi(x) = \frac{d(x, F_0)}{d(x, F_0) + d(x, F_1)}$$

est continue et vérifie $\varphi^{-1}(\{0\} = F_0$ et $\varphi^{-1}(\{1\} = F_1$.

Voici une première application de la densité des fonctions continues à support compact.

Proposition 3.3 *Pour $f \in L^p$, $p \geq 1$, et $h \in \mathbb{R}^d$, notons*

$$w_p(f, h) = \int |f(x+h) - f(x)|^p dx \,.$$

On a

$$\lim_{h \to 0} w_p(f, h) = 0 \,.$$

Démonstration. Si f est continue à support compact, alors f est uniformément continue, donc

$$w_p(f, h) = \int |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p \to 0$$

quand h tend vers 0. Si f est seulement L^p-intégrable, on l'approche par une fonction continue à support compact g, et on obtient par l'inégalité de Minkowski

$$w_p(f, h)^{1/p} \leq w_p(f - g, h)^{1/p} + w_p(g, h)^{1/p} \leq 2\|f - g\|_p + w_p(g, h)^{1/p}$$

et la proposition suit. ■

3.1 Théorèmes de Fubini

Etant donnés deux espaces mesurés σ-finies $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, on définit l'espace mesuré produit $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ comme suit.

1. La tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est la plus petite tribu qui contient $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

2. La mesure produit $\mu\otimes\nu$ est l'unique mesure sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ telle que, pour tout $(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, on ait
$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B)\,.$$

L'unicité de la mesure produit provient du fait que les espaces sont supposés σ-finis. Du coup, cette hypothèse est cruciale dans le théorème de Fubini-Tonelli pour lequel on n'a pas d'hypothèse d'intégrabilité. Cependant, le théorème de Fubini pourrait s'abstraire de cette condition en se fixant *une* mesure produit et en supposant l'intégrabilité de la fonction.

Remarque 3.4 *La tribu produit est aussi la plus petite tribu rendant mesurables les projections sur chaque facteur. Lorsque les espaces sont métriques, la tribu produit des tribus boréliennes est la tribu borélienne pour la topologie produit. De plus, les sections canoniques* $X,Y\hookrightarrow X\times Y$ *sont aussi mesurables.*

Théorème 3.5 (Fubini-Tonelli) *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *et* $(Y,\mathcal{B},\nu)$ *deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient* σ*–finies et soit* $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ *l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si* $f:X\times Y\to[0,+\infty]$ *est une application* $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$*-mesurable, alors les applications*
$$x\mapsto\int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}\nu(y)\quad\textit{et}\quad y\mapsto\int_X f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x)$$
sont respectivement $\mathcal{A}$*- et* $\mathcal{B}$*-mesurables et*
$$\int_{X\times Y} f(x,y)\ \mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}\nu(y)\right]\ \mathrm{d}\mu(x)=\int_Y\left[\int_X f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x)\right]\ \mathrm{d}\nu(y).$$

Dans cet énoncé, le résultat peut être infini.

Théorème 3.6 (Fubini) *Soient* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *et* $(Y,\mathcal{B},\nu)$ *deux espaces mesurés tels que les deux mesures soient* σ*–finies et soit* $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ *l'espace mesurable produit muni de la mesure produit. Si* $f:X\times Y\to\mathbb{C}$ *est une application mesurable alors* f *est intégrable si*
$$\int_{X\times Y}|f(x,y)|d(\mu\otimes\nu)(x,y)<\infty\,.$$
Dans ce cas, les applications
$$x\mapsto\int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}\nu(y)\quad\textit{et}\quad y\mapsto\int_X f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x)$$
sont définies presque partout, sont respectivement intégrables et
$$\int_{X\times Y} f(x,y)\ \mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)=\int_X\left[\int_Y f(x,y)\ \mathrm{d}\nu(y)\right]\ \mathrm{d}\mu(x)=\int_Y\left[\int_X f(x,y)\ \mathrm{d}\mu(x)\right]\ \mathrm{d}\nu(y).$$

3.2 Définition

Etant données deux fonctions mesurables f et g et une valeur $x \in \mathbb{R}^d$, on s'intéresse à l'expression

$$\int f(x-y)g(y)dy$$

et on cherche des conditions sur f et g qui assurent l'existence de cette quantité. On remarque que la valeur de cette intégrale, si elle existe, ne dépend pas des valeurs prises par f et g sur des ensembles négligeables.

Théorème 3.7 *Soient $f \in L^1$ et $g \in L^p$, $p \in [1, \infty]$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et si on pose*

$$h(x) := \int f(x-y)g(y)\,dy\,,$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a alors $h \in L^p$ et

$$\|h\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$$

Définition 3.8 *La fonction h du théorème est appelée <u>convoluée</u> de f et g et on la note $h = f \star g$.*

Démonstration. On pose $F(t,s) = f(t-s)g(s)$. C'est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{2d}$ car produit de deux fonctions mesurables. On traite d'abord pas le cas $p = 1$. On a

$$\begin{aligned} \int ds \int dt\,|F(t,s)| &\leq \int ds\,|g(s)| \int |f(t)|\,dt \\ &= \|g\|_1 \|f\|_1\,. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on en déduit que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}^d$, la fonction $s \mapsto f(t-s)g(s)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on a bien

$$\begin{aligned} \int |h(t)|\,dt &= \int dt \left| \int ds\,F(t,s) \right| \\ &\leq \int dt \int ds\,|F(t,s)| \\ &= \int |f(t)|\,dt \int |g(s)|\,ds\,. \end{aligned}$$

On suppose maintenant $p = \infty$. On a alors pour presque tout $t \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} |h(t)| &= \left| \int f(t-s)g(s)\,ds \right| \\ &\leq \int |f(t-s)g(s)|\,ds \\ &\leq \|g\|_\infty \int |f(t-s)|\,ds \\ &= \|g\|_\infty \int |f(s)|\,ds\,. \end{aligned}$$

(Notez le changement de variables qui remplace $t-s$ par s et laisse la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ invariante.)

On a montré que

$$\|h\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty .$$

Traitons maintenant le cas $p > 1$. Le théorème de Fubini-Tonelli implique

$$\int |f(t)| \cdot |g(x-t)|^p dx dt = \|f\|_1 \cdot \|g\|_p^p$$

donc, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto |f(t)| \cdot |g(x-t)|^p$ est intégrable. Pour un tel x, et en utilisant l'inégalité de Hölder, avec $(1/p) + (1/q) = 1$,

$$\begin{aligned}
\int |f(t) g(x-t)|\, dt &\leq \int |f(t)|^{1/q} (|f(t)|^{1/p} \cdot |g(x-t)|) dt \\
&\leq \left(\int |f(t)| dt \right)^{1/q} \cdot \left(\int |f(t)| \cdot |g(x-t)|^p dt \right)^{1/p} \\
&\leq \|f\|_1^{1/q} \left(\int |f(t)| \cdot |g(x-t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty .
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $t \mapsto f(t) g(x-t)$ est intégrable pour presque tout x. Il vient, pour ces points x en question,

$$\begin{aligned}
|f \star g(x)| &= \left| \int f(y) g(x-y) dy \right| \\
&\leq \int |f(t)| \cdot |g(x-t)| dt \\
&\leq \|f\|_1^{1/q} \left(\int |f(t)| \cdot |g(x-t)|^p dt \right)^{1/p} .
\end{aligned}$$

On élève cette inégalité à la puissance p et on intègre par rapport à x, et on utilise le théorème de Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned}
\int |f \star g(x)|^p dx &\leq \|f\|_1^{p/q} \int \left(\int |f(t)| \cdot |g(x-t)|^p dt \right) dx \\
&= \|f\|_1^{p/q} \int |f(t)| \left(\int |g(x-t)|^p dx \right) dt \\
&= \|f\|_1^{p/q} \int |f(t)| \cdot \|g\|_p^p dt \\
&= \|f\|_1^{p/q+1} \cdot \|g\|_p^p = (\|f\|_1 \cdot \|g\|_p)^p .
\end{aligned}$$

■

Exercice 3.9 *Montrer que si $f \in L^p$, $g \in L^q$, avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $(1/p) + (1/q) - 1 \geq 1$, alors $f \star g$ est bien défini pp. et $(f \star g) \in L^r$, où r vérifie $(1/r) = (1/p) + (1/q) - 1$.*

Exercice 3.10 *On suppose que $f \in L^1_{loc}$, $g \in L^p_{loc}$, $1 \leq p \leq \infty$, et f ou g à support compact. Montrer que $f \star g$ existe presque partout et définit un élément de L^p_{loc}.*

3.3 Propriétés

Exercice 3.11 *Vérifier que la convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition dans* L^1.

Exercice 3.12 *Montrer que si* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *avec* $(1/p) + (1/q) = 1$, *alors* $f \star g$ *est continue. Montrer que si* $p, q > 1$, *alors* $f \star g$ *tend vers* 0 *à l'infini.*

Exercice 3.13 *On suppose* $f \in L^1_{loc}$ *et* $g \in \mathcal{C}^1$, *avec* g *à support compact, alors* $f \star g$ *est aussi de classe* $\mathcal{C}^1$ *et*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f \star g) = f \star \frac{\partial}{\partial x_j} g\,.$$

Exercice 3.14 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et soit* g *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telle que* $g, g' \in L^\infty$. *Montrer que* $f \star g$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *de dérivée* $f \star g'$.

3.4 Approximation de l'identité

Notre point de départ sera la notion fondamentale suivante.

Définition 3.15 *Une* <u>*approximation de l'identité*</u> *est une suite de fonctions continues* (p_n) *définies sur* $\mathbb{R}^d$ *telles que:*
(i) $\int p_n(t)\, dt = 1$,
(ii) $\sup_n \int |p_n(t)|\, dt < \infty$,
(iii) pour tout $\delta > 0$, *on a* $\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|t|} |p_n(t)|\, dt = 0$.

En pratique, nous avons souvent affaire avec une suite (p_n) à valeurs positives. Dans ce cas, (ii) est superflue.

Son intérêt réside dans le théorème suivant.

Théorème 3.16 *Soit* (p_n) *une approximation de l'identité.*
a) Soit $p \geq 1$. *Pour toute fonction* $f \in L^p$, *la suite* $(f \star p_n)_n$ *converge vers* f *dans* L^p.
b) Si f *est bornée et uniformément continue, alors la suite* $(f \star p_n)_n$ *converge uniformément vers* f.

Il existe de nombreuses approximations de l'identité.

Démonstration du Théorème 3.16. Notons

$$M = \sup_n \int |p_n(t)|\, dt\,.$$

a) On se fixe n et $\delta \in]0, 1/3]$.

Alors, en utilisant (i) et (ii), ainsi que l'inégalité de Hölder, avec $(1/p) + (1/q) = 1$ (en faisant attention au cas $p = 1$),

$$\begin{aligned}
|f\star p_n(x)-f(x)| &= \left|\int p_n(y)(f(x-y)-f(x))dy\right| \\
&\leq \int |p_n(y)|^{1/q}(|p_n(y)|^{1/p}\cdot|f(x-y)-f(x)|)dy \\
&\leq \left(\int |p_n(y)|dy\right)^{1/q}\cdot\left(\int |p_n(y)|\cdot|f(x-y)-f(x)|^p dy\right)^{1/p} \\
&\leq M^{1/q}\left(\int |p_n(y)|\cdot|f(x-y)-f(x)|^p dy\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

On élève cette inégalité à la puissance p et on intègre par rapport à x, et on utilise le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int |f\star p_n(x)-f(x)|^p dx &\leq M^{p/q}\int\left(\int |p_n(y)|\cdot|f(x-y)-f(x)|^p dy\right)dx \\
&= M^{p/q}\int |p_n(y)|\left(\int |f(x-y)-f(x)|^p dx\right)dy \\
&= M^{p/q}\int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)|\left(\int |f(x-y)-f(x)|^p dx\right)dy \\
&\quad +M^{p/q}\int_{|y|\leq\delta} |p_n(y)|\left(\int |f(x-y)-f(x)|^p dx\right)dy\,.
\end{aligned}$$

Or, la Proposition 3.3 et (ii) impliquent

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\leq\delta} |p_n(y)|\left(\int |f(x-y)-f(x)|^p dx\right)dy &= \int_{|y|\leq\delta} |p_n(y)|w_p(f,-y)dy \\
&\leq \sup_{|y|\leq\delta} w_p(f,y)\sup_n \int |p_n(y)|dy \\
&\leq M\sup_{|y|\leq\delta} w_p(f,y)
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 avec δ (indépendemment de n). D'autre part, par l'inégalité de Minkowski,

$$\int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)|\left(\int |f(x-y)-f(x)|^p dx\right)dy \leq 2\|f\|_p^p\int_{|y|\geq\delta} |p_n(y)|dy$$

qui tend vers 0 avec n d'après (iii).

b) Si f est uniformément continue, alors, en utilisant le même type d'argument, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
|f \star p_n(x) - f(x)| &= \left| \int p_n(y)(f(x-y) - f(x))dy \right| \\
&\leq \int |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| dy \\
&= \int_{|y| \geq \delta} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\quad + \int_{|y| \leq \delta} |p_n(y)| \cdot |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} |p_n(y)| dy \\
&\quad + \sup_{x, |y| \leq \delta} |f(x) - f(x-y)| \sup_n \int |p_n(y)| dy
\end{aligned}$$

Cette estimation ne dépend pas de x :

$$\|f \star p_n - f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \delta} |p_n(y)| dy + M \sup_{x, |y| \leq \delta} |f(x) - f(x-y)| \, .$$

On choisit d'abord δ en fonction de la continuité uniforme de f, puis n assez grand, pour montrer la convergence uniforme. ■

Exercice 3.17 *1. Montrer que la formule*

$$f(x) = \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) \cdot \chi_{]-1,1[}(x)$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

2. *En déduire l'existence, pour chaque $\varepsilon > 0$, d'une fonction $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1]$ à support dans $[-(1+\varepsilon), (1+\varepsilon)]$ qui vaut 1 sur $[-1,1]$.*

Exercice 3.18 *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue à support compact d'intégrale 1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ définie par*

$$f_n(x) = n^d f(nx)$$

est une approximation de l'identité.

3.5 Applications

Définition 3.19 (suite régularisante) *Une suite régularisante est une approximation de l'identité dont les éléments sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans un compact fixe.*

Théorème 3.20 *L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact est dense dans L^p, pour tout $p \geq 1$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p$. Si (p_n) est une suite régularisante, alors $p_n \star f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et tend vers f dans L^p. Pour s'assurer d'avoir la suite à support compact, on peut tronquer f sur une gosse boule. ■

Théorème 3.21 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact dans Ω sont denses dans L^p, pour $p \geq 1$.*

Démonstration. Soit (K_n) une exhaustion de Ω, et notons χ_n la fonction indicatrice de K_n. Si $f \in L^p$, alors $f\chi_n$ tend vers f dans L^p par convergence dominée. Prenons φ une fonction à support compact, et posons $p_k(x) = n^d\varphi(nx)$. Si n est assez grand, alors le support de $p_k \star (\chi_n f)$ est contenu dans Ω. Le théorème précédent s'applique. ■

Exercice 3.22 1. *Démontrer que la suite d'applications numériques $(k_n)_n$ définie par $k_n(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et*

$$k_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt}$$

si $|x| \leq 1$ définit une approximation de l'identité que l'on appelle le noyau de Weiertrass. On pourra remarquer que

$$\int_{-1}^1 t(1-t^2)^n dt \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{1}{n+1}\,.$$

2. (a) *Démontrer que si f est une fonction continue sur $I = [-1/2, 1/2]$, alors la restriction de $k_n \star f$ est un polynôme.*
   (b) *En déduire le théorème d'approximation polynomiale de Weiertrass.*

Exercice 3.23 *Posons, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\gamma_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)\,.$$

1. *Montrer que $\gamma_t \star \gamma_s = \gamma_{t+s}$ pour tous $t, s > 0$.*
2. *Montrer que (γ_t) définit une approximation de l'identité quand t tend vers 0.*
3. *Soient $p \in [1, \infty]$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ définie par $f(x,t) = \gamma_t \star f(x)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
4. *On suppose g uniformément continue. Vérifier que f est solution de l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}f - \dfrac{1}{2}\Delta f = 0 & \text{si } t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ f(0,x) = g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

4 Espaces de Hilbert

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive:

(PSR1) pour tous $u, v, w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.

(PSR2) pour tous $u, v \in E$, on a $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

(PSR3) pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, on a $\langle u, u \rangle > 0$.

Si E est un espace sur $\mathbb{C}$, alors un produit scalaire hermitien est une forme sesquilinéaire définie positive:

(PSC1) pour tous $u, v, w \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.

(PSC2) pour tous $u, v \in E$, on a $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.

(PSC3) pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, on a $\langle u, u \rangle > 0$.

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Dans la suite, on supposera tout espace défini sur $\mathbb{C}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.— Soit E un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \cdot \langle y, y \rangle^{1/2} .$$

DÉMONSTRATION. Par définition du produit scalaire, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in E$, alors

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 Re\, \lambda \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle .$$

Supposons $y \neq 0$ et posons $\lambda = -\overline{\langle x, y \rangle} / \langle y, y \rangle$:

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2Re \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} .$$

■

Exercice 4.1 *Soit E un espace préhilbertien. On pose $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.*

1. *Montrer que $\| \cdot \|$ définit une norme sur E.*

2. *Montrer que, pour tout $y \in E$, l'application $L_y : E \to \mathbb{R}$ définie par $L_y(x) = \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire continue et si (x_n) et (y_n) sont deux suites qui convergent respectivement vers x et y, alors $(\langle x_n, y_n \rangle)_n$ tend vers $\langle x, y \rangle$. En déduire en particulier que $\|x_n\|$ tend vers $\|x\|$.*

Lemme 4.2 *Soient x, y deux vecteurs d'un espace préhilbertien.*

Polarisation réelle: si E est réel, alors

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)\,.$$

Polarisation complexe: si E est complexe, alors

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2)\,.$$

Définition 4.3 *Un espace préhilbertien E est un espace de Hilbert si $(E, \|\cdot\|)$ est complet.*

Exercice 4.4 *Montrer qu'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est un espace Hilbert si et seulement si il vérifie l'identité du parallèlogramme:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

pour tous $x, y \in E$.

Exercice 4.5 *Montrer que L^p est un espace de Hilbert si et seulement si $p = 2$.*

Les exemples standards sont les espaces euclidiens, hermitiens et l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable muni du produit scalaire

$$\langle (x_n)_n, (y_n)_n\rangle = \sum x_n \overline{y_n}\,.$$

4.1 Projection

Théorème 4.6 *Soit K un ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Soit $x \in H$; il existe un unique $y \in K$ tel que*

$$\|x-y\| = \inf_{z\in K} \|x-z\|\,.$$

Cet élément y est l'unique élément $y' \in K$ tel que, pour tout $z \in K$, $Re\,\langle x-y', z-y'\rangle \le 0$.

Ce théorème permet de définir la projection $p_K : H \to K$ en posant $p_K(x) = y$. On remarque que $p_K|_K = id$ et $p_K \circ p_K = p_K$.

Démonstration. On se ramène au cas où $x = 0$. Il suffit de montrer que toute suite (y_n) de K telle que $\|y_n\| \to d(0, K)$ est une suite de Cauchy: on en déduira à la fois l'existence et l'unicité. Prenons une telle suite (y_n). L'identité du parallèlogramme montre

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\|y_m - y_n\|^2 &= \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) - \left\|\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \\ &\le \frac{1}{2}(\|y_n\|^2 + \|y_m\|^2) - d(0,K)^2\,.\end{aligned}$$

On a utilisé la convexité de K pour dire que $(y_n + y_m)/2 \in K$. Quand m, n tendent vers l'infini, le terme de droite tend vers 0: donc la suite est bien de Cauchy. Soit y la limite. Pour tout $z \in K$, on a $\|y-x\| \leq \|z-x\|$. Donc, si $t \in [0,1]$, alors, en élevant au carré et en développant:

$$\begin{aligned}\|y-x\|^2 &\leq \|(y+t(z-y))-x\|^2 \\ &\leq \|y-x\|^2 - 2tRe\,\langle y-x, y-z\rangle + t^2\|y-z\|^2 .\end{aligned}$$

L'arbitraire sur t implique $2Re\,\langle y-x,y-z\rangle - t\|y-z\|^2 \leq 0$ et en faisant tendre t vers 0, on obtient la relation recherchée.

Réciproquement, si $Re\,\langle y-x,y-z\rangle \leq 0$ pour tout $z \in K$, alors

$$\begin{aligned}\|z-x\|^2 &= \|(z-y)-(x-y)\|^2 \\ &= \|z-y\|^2 - 2Re\,\langle z-y, x-y\rangle + \|x-y\|^2 \\ &\geq \|x-y\|^2 .\end{aligned}$$

Donc y est bien le point le plus proche. ■

Exercice 4.7 *Soit K convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Montrer que pour tous $x, y \in H$, on a*

$$\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x-y\| .$$

On montre que $\|p_K(x)-p_K(y)\|^2 \leq \|p_K(x)-p_K(y)\| \cdot \|x-y\|$:

$$\begin{aligned}\|p_K(x)-p_K(y)\|^2 &= Re\,\langle p_K(x)-p_K(y), p_K(x)-p_K(y)\rangle \\ &= Re\,\langle p_K(x)-x, p_K(x)-p_K(y)\rangle + Re\,\langle x-y, p_K(x)-p_K(y)\rangle \\ &\quad + Re\,\langle y-p_K(y), p_K(x)-p_K(y)\rangle \\ &\leq Re\,\langle x-y, p_K(x)-p_K(y)\rangle \leq \|x-y\| \cdot \|p_K(x)-p_K(y)\| .\end{aligned}$$

On a utilisé la caractérisation du projeté ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 4.8 *Soit $(K_n)_n$ une suite croissante de convexes, fermés non vides d'un espace de Hilbert H, et posons $K = \overline{\cup K_n}$. Alors K est un convexe fermé non vide et, pour tout $x \in H$, $p_{K_n}(x) \to p_K(x)$.*

En déduire que si (x_n) est une suite de H qui tend vers x, alors $p_{K_n}(x_n)$ tend vers $p_K(x)$.

Démonstration. Par construction K est fermé et non vide. Montrons sa convexité. Soit $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$, et considérons $tx + (1-t)y$. Il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ avec $x_n, y_n \in K_n$ qui tendent vers x, y respectivement. Du coup $tx_n + (1-t)y_n \in K$ et

$$\|[tx_n + (1-t)y_n] - [tx + (1-t)y]\| \leq t\|x_n - x\| + (1-t)\|y - y_n\|$$

donc $[tx + (1-t)y] \in K$ et K est convexe.

On montre que $\lim \|x - p_{K_n}(x)\| = d(x,K)$. Tout d'abord, puisque (K_n) est croissante, la suite $(\|x - p_{K_n}(x)\|)_n$ est décroissante et minorée, donc convergente: notons δ sa limite. Par définition, on a $\delta \geq d(x,K)$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $y \in \cup K_n$ tel que $\|y - p_K(x)\| \leq \varepsilon$. Par conséquent, il existe n tel que $y \in K_n$, et

$$\delta \leq \|p_{K_n}(x) - x\| \leq \|y - x\| \leq d(x,K) + \varepsilon$$

ce qui montre que $\delta = d(x,K)$. D'après la démonstration du théorème de projection, on en déduit que $(p_{K_n}(x))$ est une suite de Cauchy dans K qui tend vers $p_K(x)$. ■

Exercice 4.9 *Soit* $(K_n)_n$ *une suite décroissante de convexes, fermés non vides d'un espace de Hilbert* H*, et supposons que* $K = \cap K_n$ *est non vide. Montrer que* K *est un convexe fermé de* H *et, pour tout* $x \in H$*,* $p_{K_n}(x) \to p_K(x)$*.*

4.2 Orthogonalité

Définition 4.10 *Si* F *est un sous-ensemble d'un espace de Hilbert, on pose*

$$F^{\perp} = \{x \in H,\ \forall\, y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}\,.$$

En particulier, $F^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé: pour tout $x \in H$, on a $x^{\perp} = Ker\, L_x$ et $F^{\perp} = \cap_{x\in F} x^{\perp}$, donc $F^{\perp}$ est une intersection de sous-espaces vectoriels fermés.

Proposition 4.11 *Soit* F *un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert* H*.*

1. *On a* $H = F \oplus F^{\perp}$ *et, pour tout* $x \in H$*,*
$$x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$$
2. *La projection* $p_F : H \to F$ *est linéaire,* $Ker\, p_F = F^{\perp}$ *et* $Im\, p_F = F$*.*
3. *On a* $(F^{\perp})^{\perp} = F$*.*

Démonstration. Si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $\langle x, x\rangle = 0$ donc $x = 0$. Soit $y \in F$, on a, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $p_F(x) + \lambda y \in F$ donc $Re\,\langle x - p_F(x), \lambda y\rangle \le 0$, soit $Re\,\overline{\lambda}\langle x - p_F(x), y\rangle \le 0$. En prenant $\lambda = \langle x - p_F(x), y\rangle$, on obtient $\overline{\lambda}\langle x - p_F(x), y\rangle = |\langle x - p_F(x), y\rangle|^2$, donc $\langle x - p_F(x), y\rangle = 0$. Ceci montre que $(x - p_F(x)) \in F^{\perp}$ et donc $H = F \oplus F^{\perp}$ puisque $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$.

Pour montrer que p_F est linéaire, on écrit, pour $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= p_F(x) + (x - p_F(x)) + \lambda p_F(y) + \lambda(y - p_F(y)) \\ &= (x + \lambda y) + (x + \lambda y - p_F(x + \lambda y)) \end{aligned}$$

donc l'unicité de la décomposition montre

$$p_F(x) + \lambda p_F(y) - p_F(x + \lambda y) = 0\,.$$

Si $x \in F^{\perp}$, alors, pour tout $z \in F$, on a

$$Re\,\langle x - 0, z - 0\rangle = Re\,\langle x, z\rangle = 0 \le 0$$

donc, par la caractérisation de la projection, on en déduit que $p_F(x) = 0$. Du coup, $F^{\perp} \subset Ker\, p_F$. Soit $x \in H$, on écrit $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ donc si $x \in Ker\, p_F$ alors $x = 0 + (x - 0)$ donc $x \in F^{\perp}$.

Par définition, on a $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Or, on a

$$H = F \oplus F^{\perp} = F^{\perp} \oplus (F^{\perp})^{\perp}$$

donc toute décomposition selon $F \oplus F^{\perp}$ est en particulier une décomposition selon $F^{\perp} \oplus (F^{\perp})^{\perp}$: on en déduit que $F = (F^{\perp})^{\perp}$. Il vient $x = p_{F^{\perp}}(x) + (x - p_{F^{\perp}}(x))$ et on en déduit $p_{F^{\perp}} = id - p_F$, et $x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$. $\blacksquare$

Proposition 4.12 *Soit $A \subset H$ auquel on associe le sous-espace vectoriel E engendré par A. Alors E est dense dans H si et seulement si $A^\perp = \{0\}$.*

Théorème 4.13 (Riesz) *Toute forme linéaire continue L sur un espace de Hilbert H est de la forme $L(x) = \langle x, a\rangle$ où $a \in H$ est unique.*

DÉMONSTRATION. Si $L = 0$, alors $a = 0$ convient. Sinon, L est surjective; notons F le noyau de L. Le théorème de décomposition canonique de L implique $L : H/F \to \mathbb{C}$ est un isomorphisme. Or, en écrivant $H = F \oplus F^\perp$, on en déduit que $H/F \simeq F^\perp$ et donc $F^\perp$ est de dimension 1. Prenons $b \in F^\perp$, $b \neq 0$: l'application $x \mapsto \langle x, b\rangle$ est une forme linéaire de noyau $b^\perp = F$: donc cette forme est proportionnelle à L: on a $L = \lambda L_b = L_{\overline{\lambda}b}$ et $a = \overline{\lambda}b$ convient. L'unicité provient du fait que deux solutions $a, a' \in H$ conduirait à $\langle x, a - a'\rangle = 0$ pour tout $x \in H$: donc, en prenant $x = a - a'$, on obtient $a = a'$. ∎

Ce résultat se généralise ainsi:

Théorème 4.14 (Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert réel et soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ telles que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\| \cdot \|v\| \quad \textit{pour tous } u, v \in H\,,$$

et

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \textit{pour tout } u \in H\,.$$

Soit $L \in H'$ une forme linéaire continue. Il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que $L(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in H$.

On commence par un lemme qui a son propre intérêt:

Lemme 4.15 *Soit H un espace de Hilbert et soit a une forme bilinéaire continue. Alors il existe un endomorphisme continu $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tous $u, v \in H$, on a $a(u, v) = \langle A(u), v\rangle$.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in H$; l'application $v \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire continue donc le théorème de représentation de Riesz implique l'existence d'un unique vecteur $A(u) \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, on ait $a(u, v) = \langle A(u), v\rangle$. L'unicité de ce théorème nous permet d'établir la linéarité de A. En effet, prenons $u, u' \in H$ et un scalaire λ, alors pour tout $v \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\langle A(u) + \lambda A(u'), v\rangle &= \langle A(u), v\rangle + \lambda\langle A(u'), v\rangle \\
&= a(u, v) + \lambda a(u', v) \\
&= a(u + \lambda u', v) = \langle A(u + \lambda u'), v\rangle\,.
\end{aligned}$$

La continuité découle de celle de a: si $u \in H$, alors ou bien $A(u) = 0$ et il n'y a rien à montrer, ou bien on peut poser $v = A(u)/\|A(u)\|$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\|A(u)\| &= \langle A(u), v\rangle = a(u, v) \\
&\leq \|a\|\|u\|
\end{aligned}$$

puisque v est unitaire. ∎

DÉMONSTRATION DU THM 4.14. Supposons dans un premier temps que a est symétrique. Dans ce cas, a définit un produit scalaire sur H puisque $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$ donc a est définie positive. De plus, $\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) \leq C\|u\|^2$ donc sa norme associée est équivalente à la norme initiale: on en déduit que H muni du produit scalaire a est un espace hilbertien. De plus, L est aussi continue pour cette norme: si $v \in H$, alors $|L(v)| \leq \|L\|(1/\sqrt{\alpha})\sqrt{a(v,v)}$. Donc le théorème de représentation de Riesz implique l'existence d'un unique vecteur $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, on a $a(u,v) = L(v)$.

On ne suppose plus que a est symétrique. Dans ce cas, le Lemme 4.15 implique l'existence d'un endomorphisme continu tel que $a(u,v) = \langle A(u), v\rangle$. Nous allons montrer que A est en fait un automorphisme de H.

On remarque tout d'abord le point suivant: si $u \in H$ alors

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) \leq \langle A(u), u\rangle \leq \|A(u)\| \cdot \|u\|$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En particulier, si $u \neq 0$, alors

$$\|u\| \leq (1/\alpha)\|A(u)\| \,. \tag{1}$$

Ceci montre de suite que A est injectif.

Montrons que son image est fermée: soit (y_n) une suite de $Im\, A$ qui tend vers $y \in H$. On considère (u_n) telle que $A(u_n) = y_n$. Alors (u_n) est de Cauchy puisque, d'après (1), on a

$$\|u_p - u_q\| \leq (1/\alpha)\|y_p - y_q\|$$

donc (u_n) tend vers un vecteur $u \in H$. Par continuité de A, la suite $(A(u_n))_n = (y_n)$ tend vers $A(u) = y$ donc y est dans l'image.

Nous pouvons en déduire que A est surjectif: si $v \in Im\, A^\perp$, alors, pour tout $u \in H$, on a $\langle A(u), v\rangle = 0$. En particulier, pour $u = v$, on obtient

$$\alpha\|v\|^2 \leq a(v,v) = \langle A(v), v\rangle = 0$$

donc $v = 0$. Or, comme $Im\, A$ est fermé, on a $H = Im\, A$.

Maintenant que l'on sait que A est un automorphisme, nous pouvons établir le théorème: le théorème de représentation de Riesz implique l'existence d'un unique vecteur $w \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, on a $\langle w, v\rangle = L(v)$. Si on pose $u = A^{-1}(w)$, il vient $a(u,v) = \langle w, v\rangle = L(v)$. ∎

4.3 Bases hilbertiennes

Soit H un espace de Hilbert. Une famille orthogonale de vecteurs est une famille $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0$ si $\alpha \neq \beta$. On dit qu'elle est orthonormale si de plus $\|u_\alpha\| = 1$.

Proposition 4.16 *Soit (u_n) une famille orthogonale. La série de terme général (u_n) est convergente si et seulement si*

$$\sum \|u_n\|^2 < \infty \,.$$

Dans ce cas, la limite x vérifie

$$\|x\|^2 = \sum \|u_n\|^2 \,.$$

Démonstration. On vérifie que les sommes partielles définissent une suite de Cauchy si et seulement la série de terme général $\|u_n\|^2$ est convergente, car $\| \sum_{0\le j\le n} u_j\|^2 = \sum_{0\le j\le n} \|u_j\|^2$. Comme la norme est continue, la norme de la limite est bien ce qui est annoncé. ■

Proposition 4.17 *Soit (e_n) une famille orthonormale, et F la fermeture de l'espace engendré par cette famille (finie ou dénombrable). Alors*

$$p_F(x) = \sum \langle x, e_j\rangle e_j$$

et on a l'inégalité de Bessel:

$$\|x\|^2 \ge \sum |\langle x, e_j\rangle|^2 .$$

Démonstration. On décrit F comme la fermeture d'une union dénombrable d'espaces $F_n = vect\{e_1, \dots, e_n\}$ de dimension finie. A chaque étape, on montre que $(x - \sum_{1\le j\le n}\langle x, e_j\rangle e_j) \in F_n^\perp$, ce qui implique que

$$p_{F_n}(x) = \sum_{1\le j\le n} \langle x, e_j\rangle e_j .$$

Par ailleurs, on a $x = p_{F_n}(x) + p_{F_n^\perp}(x)$ donc

$$\|x\|^2 \ge \|p_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{1\le j\le n} |\langle x, e_j\rangle|^2 .$$

Ceci montre que $(\langle x, e_j\rangle)_n$ est de carré sommable et l'inégalité de Bessel.

De plus, comme les projections (p_{F_n}) tendent vers p_F par la Proposition 4.8, on obtient aussi

$$p_F(x) = \sum \langle x, e_j\rangle e_j .$$

■

Corollaire 4.18 *Si (e_n) est orthonormale et F est le sous-espace fermé engendré par cette famille, alors*

$$x \in H \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_n \in \ell^2$$

est linéaire continue et surjective. De plus,

$$(a_n) \in \ell^2 \mapsto \sum a_n e_n \in F$$

définit un inverse à droite.

Démonstration. L'inégalité de Bessel implique que la suite image est de carré sommable. La linéarité provient de celle du produit scalaire. La Proposition 4.16 implique que si $(a_n)_n \in \ell^2$, alors $\sum a_n e_n$ est convergente dans H et définit un vecteur $x \in F$. Par continuité du produit scalaire, on a

$$\langle x, e_k\rangle = \sum_n a_n \langle e_n, e_k\rangle = a_k .$$

Donc on a bien défini un inverse et établit la surjectivité. ■

Définition 4.19 *Une base hilbertienne est une famille orthonormale $(e_i)_{i\in I}$ telle que $H = \overline{vect\{e_i\}}$.*

Théorème 4.20 *Soit (e_n) une famille orthonormale. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *La famille (e_n) est totale: soit $x \in H$, si $\langle x, e_n\rangle = 0$ pour tout n, alors $x = 0$.*
2. *La famille (e_n) est une base hilbertienne.*
3. *Pour tous $x, y \in H$, on a*
$$\langle x, y\rangle = \sum \langle x, e_n\rangle \cdot \overline{\langle y, e_n\rangle}\,.$$
4. *Pour tout $x \in H$, on a la formule de Parseval*
$$\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_n\rangle|^2\,.$$
5. *L'application $x \in H \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_n \in \ell^2$ définit une isométrie entre H et ℓ^2.*

Démonstration. On note F le sous-espace fermé F engendré par (e_n).

(1) implique (2). Si la famille est totale, alors F a un orthogonal trivial. Donc (e_n) est une base hilbertienne.

(2) implique (3). On écrit
$$x = \sum \langle x, e_n\rangle e_n \quad \text{et} \quad y = \sum \langle y, e_n\rangle e_n$$
et on calcule, par linéarité,
$$\begin{aligned}\langle \sum_{1\le j\le n} \langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{1\le k\le n} \langle y, e_k\rangle e_k\rangle &= \sum_{1\le j\le n}\sum_{1\le k\le n} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle} \langle e_j, e_k\rangle \\ &= \sum_{1\le j\le n} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle y, e_j\rangle}\,.\end{aligned}$$

D'après le Corollaire 4.18, les suites $(\langle x, e_n\rangle)_n$ et $(\langle y, e_n\rangle)_n$ sont dans ℓ^2, donc l'inégalité de Hölder implique que $(\langle x, e_n\rangle \cdot \overline{\langle y, e_n\rangle})_n$ est sommable. Par continuité du produit scalaire, quand n tend vers l'infini, on obtient
$$\langle x, y\rangle = \sum_{1\le j\le n} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle y, e_j\rangle}\,.$$

(3) implique (4) en prenant $y = x$.

(4) implique (1). Si $\langle x, e_n\rangle = 0$ pour tout n, alors $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

(1–4) impliquent (5). La famille est totale donc l'application est injective. C'est une base hilbertienne, donc elle est surjective. La formule de Parseval implique que c'est une isométrie.

(5) implique (1–4). Comme c'est une isométrie, on a la formule de Parseval. ■

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Soit (u_n) une famille de vecteurs de H, on construit une famille orthornormale (e_n) en posant

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u\|_1}$$

et, si $(e_1, \ldots, e_n)$ sont construits,

$$e_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_j \rangle e_j}{\|u_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle u_{n+1}, e_j \rangle e_j\|} .$$

On remarque que, pour tout $n \geq 1$, $vect(e_1, \ldots e_n) = vect(u_1, \ldots u_n)$.

Théorème 4.21 *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt. ■

5 Polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle réel ρ une fonction intégrable et strictement positive sur I On note $d\mu(x) = \rho(x)dx$ et on considère $L^2(I, \mu)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_I fg d\mu = \int_I fg\rho dx .$$

Une suite de polynômes orthogonaux (P_n) est une suite de polynômes, orthogonale pour le produit scalaire, telle que P_n est de degré n pour tout $n \geq 0$.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré au plus n.

Exercice 5.1 *Soit (P_n) une suite de polynômes orthogonaux. On écrit $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ si $n \geq 1$; on pose $P_0 = a_0$ et $b_0 = 0$. Enfin, on écrit $\lambda_n = \|P_n\|_2^2$.*

1. *Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.*

2. *Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour tout $n \geq 1$.*

3. *Montrer que, pour $n \geq 1$, il l existe (α_n, β_n) que l'on déterminera tel que le degré de $P_{n+1} - A_n P_n$ est au plus $n - 1$, où $A_n(x) = \alpha_n x + \beta_n$. En déduire qu'il existe γ_n, que l'on déterminera, tel que*
$$P_{n+1} = A_n P_n - \gamma_n P_{n-1} .$$
On étendra cette formule pour $n = 0$.

4. *Soit $p_n : L^2(I, \mu) \to \mathbb{R}_n[X]$ la projection orthogonale.*

(a) *Montrer qu'il existe* $K_n : I \times I \to \mathbb{R}$ *telle que, pour tout* $f \in L^2(I, \mu)$, *on ait*

$$p_n(f)(x) = \int K_n(x,y) f(y) d\mu(y)\,.$$

(b) *Montrer que*

$$K_n(x,y) = \frac{a_n}{a_{n+1}\lambda_n} \; \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

et

$$K_n(x,x) = \frac{a_n}{a_{n+1}\lambda_n} \; (P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$

5. *Montrer que* P_n *a* n *racines simples* $z_1^n < z_2^n < \ldots < z_n^n$ *réelles dans* I. *On pourra considérer le polynôme unitaire qui a les mêmes racines dans* I.

   Montrer par récurrence que les racines de P_n *séparent celles de* P_{n-1} *au sens que*

$$z_1^n < z_1^{n-1} < z_2^n < z_2^{n-1} < \ldots < z_{n-1}^{n-1} < z_n^n\,.$$

   On pourra se ramener au cas où $a_n \equiv 1$, *et étudier le signe de* $P_{n+1}(z_j^n)$.

Exercice 5.2 *On suppose qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\int e^{\alpha|x|} d\mu(x) < \infty$.

1. *Montrer que* $\mathbb{R}[X] \subset L^2(I, \mu)$.
2. *Montrer que, pour toute suite* $(k_n)_{n\geq 0}$ *de réels non nuls, il existe une unique suite de polynômes orthogonaux* (P_n) *telle que le coefficient dominant de* P_n *soit exactement* k_n.

Exercice 5.3 *On suppose que* I *est borné.*

1. *Montrer qu'il existe une suite de polynômes orthonormées* $(Q_n)_n$.
2. *Montrer que* $(Q_n)_n$ *est une base hilbertienne de* $L^2(I, \mu)$.

Le résultat reste vrai si on ne suppose pas I borné mais $\exp \in L^1(\mu)$. La démonstration est plus élaborée et peut s'appuyer sur la théorie de Fourier.

Exercice 5.4 *Soient* $Q(x) = a_Q(x-\alpha)(x-\beta)$ *un polynôme quadratique avec* $a_Q < 0$, *et* $L(x) = b_Q(x-\gamma)$ *un polynôme affine tels que* $\alpha < \gamma < \beta$ *et* $a_Q b_Q > 0$. *On note* $I =]\alpha, \beta[$. *On s'intéresse aux solutions polynomiales de l'équation différentielle*

$$Q(x)f''(x) + L(x)f'(x) + \lambda f(x) = 0\,.$$

On introduit l'endomorphisme $u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ *défini par* $u(P) = -(QP'' + LP')$.

On note

$$R(x) = \exp\left(\int_\gamma^x \frac{L(t)}{Q(t)} dt\right), \quad \rho(x) = \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{et} \quad d\mu(x) = \rho(x)dx\,.$$

1. *Montrer que* $\rho > 0$ *sur* I *et* $\rho \in L^1(I)$*; vérifier que* $\mathbb{R}[X] \subset L^2(I, \mu)$.

2. *Montrer que, pour tout* $n \geq 0$, $u(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.

3. *Montrer que les vecteurs propres de* u *coïncident avec les solutions de l'équation différentielles.*

4. (a) *Montrer que* u *est auto-adjoint dans* $\mathbb{R}[X]$ $(\subset L^2(I, \mu))$*. On pourra commencer par vérifier que*
$$u(P) = -\frac{1}{\rho}(RP')' .$$
   (b) *En déduire que* $\mathbb{R}[X]$ *admet une base* (P_n) *de vecteurs propres de* u.

5. *Montrer que* (P_n) *est une suite de polynômes orthogonaux de* $L^2(I, \mu)$.

6. *Montrer que*
$$u(P_n) = n\left(\frac{1-n}{2}Q'' - L'\right)P_n \, .$$

7. *Montrer que*
$$Q_n(x) = \frac{1}{\rho}\frac{d^n}{dx^n}(\rho Q^n)$$
est un polynôme de degré n *pour tout* $n \geq 0$ *et que* $(Q_n)_n$ *forme une suite de polynômes orthogonaux.*