# LA CONJECTURE DE BAUM-CONNES POUR LES GROUPES HYPERBOLIQUES PAR LES MARCHES ALÉATOIRES

PETER HAÏSSINSKY & PIERRE MATHIEU

Résumé. Nous proposons une démonstration de la conjecture de Baum-Connes (sans coefficients) pour les groupes hyperboliques en utilisant la distance de Green, une distance adaptée à l'étude des marches aléatoires.

## 1. Introduction

L'objet de cette note est de donner une nouvelle démonstration du théorème suivant dû à V. Lafforgue [5] et à I. Mineyev et G. Yu [6].

**Theorem 1.1.** *Un groupe hyperbolique non élémentaire vérifie la conjecture de Baum-Connes sans coefficients.*

L'argument principal est le même que celui dans [6] et consiste à faire opérer le groupe sur un « bon espace » afin d'appliquer le critère de V. Lafforgue [5, Cor. 0.0.4 (2)] :

**Theorem 1.2.** *Si un groupe localement compact $G$ a la propriété (RD) et admet une action propre sur un espace métrique uniformément fini, faiblement géodésique et fortement bolique, alors $G$ vérifie la conjecture de Baum-Connes sans coefficients.*

Il est connu qu'un groupe hyperbolique vérifie la propriété (RD) [4] ; nous ne nous étendrons pas plus sur cette notion. On dit qu'un espace métrique $(X,d)$ est *uniformément localement fini* si, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in X$, la boule $B(x,r)$ contienne au plus $K$ points. Soit $\alpha > 0$ ; on dit que $(X,d)$ est *faiblement $\alpha$-géodésique* si, quels que soient $x, y \in X$ et $t \in [0, d(x,y)]$, il existe $a \in X$ tel que $d(a,x) \leq t+\alpha$ et $d(a,y) \leq d(x,y) - t + \alpha$. Si $x, y \in X$, on appelle *$\alpha$-milieu de $x$ et $y$* un point $a \in X$ tel que $d(a,x) \leq (1/2)d(x,y) + \alpha$ et $d(a,y) \leq (1/2)d(x,y) + \alpha$. Enfin, on dit que $(X,d)$ est *fortement bolique* si les conditions suivantes sont réalisées :

(B1) pour tout $r > 0$ et tout $\eta > 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout quadruplet $x, y, z, t$ de points de X vérifiant $d(x,y) + d(z,t) \leq r$ et $d(x,z) + d(y,t) \geq R$, on ait $d(x,t) + d(y,z) \leq d(x,z) + d(y,t) + 2\eta$ ;

(B2) il existe une application $m : X \times X \to X$ et une constante $\alpha > 0$ telles que, pour $x, y \in X$, $m(x,y)$ soit un $\alpha$-milieu de $x$ et $y$, que pour $x, y, z \in X$, $d(m(x,y), z) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\} + 2\alpha$, et que, pour tout $p \geq 0$, il existe $N(p) \geq 0$ tel que, pour tout $N \geq N(p)$, pour $x, y, z \in X$ vérifiant $d(x,z) \leq N$, $d(y,z) \leq N$, et $d(x,y) > N$, on ait $d(m(x,y), z) < N - p$.

Nous appliquons le Théorème 1.2 à l'action de $G$ sur lui-même muni de la métrique de Green associée à une marche aléatoire. L'intérêt de notre approche est la simplicité de la définition de la métrique de Green. On rappelle sa définition ainsi que ses propriétés au paragraphe 3.

*Date*: 24 mai 2011.

Le paragraphe 2 contient des préliminaires sur la géométrie des espaces hyperboliques au sens de Gromov.

**Remerciements.**— Nous sommes reconnaissants à Vincent Lafforgue pour son intérêt à notre travail et pour avoir attiré notre attention sur les liens entre la distance de Green et la conjecture de Baum-Connes.

## 2. Espaces hyperboliques

Soit $(X,d)$ un espace métrique. On dit que cet espace est *propre* si les boules fermées de rayon fini sont compactes. On dit que $(X,d)$ est *$\delta$-hyperbolique* ($\delta \geq 0$) si, pour tous $w,x,y,z \in X$, on a

$$(y|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (x|z)_w\} - \delta\,,$$

où

$$(x|y)_w \overset{\text{def.}}{=} (1/2)\{d(x,w)+d(y,w)-d(x,y)\}\,.$$

2.1. **Espaces quasiréglés.** Etant données $\lambda \geq 1$, $c,\tau \geq 0$, une *$(\lambda,c,\tau)$-quasirègle* est une application $q: I \to X$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que, pour tous $s<t$, on ait

$$\frac{1}{\lambda}|s-t| - c \leq d(q(s),q(t)) \leq \lambda|s-t| + c\,.$$

et pour tous $s<t<u$, on ait $(q(s)|q(u))_{q(t)} \leq \tau$. On dit que $(X,d)$ est un *espace quasiréglé* s'il existe des constantes $\lambda \geq 1$, $c,\tau \geq 0$ tels que, pour tous $x,y \in X$, il existe une $(\lambda,c,\tau)$-quasirègle d'extrémités $x$ et $y$.

**Proposition 2.1.** *Un espace $\delta$-hyperbolique quasiréglé est faiblement géodésique et vérifie (B2).*

Démonstration.— On montre d'abord que $X$ est faiblement géodésique. Soient $x,y \in X$ et $t \in [0,d(x,y)]$ ; il existe une $(\lambda,c,\tau)$-quasirègle $q:[a,b] \to X$ avec $q(a)=x$ et $q(b)=y$. On suppose $(b-a)$ entier. Si $t=d(x,y)$, il suffit de choisir le point $y$, donc on suppose dorénavant $t<d(x,y)$. Posons $s_j = a+j$ pour $j \in \mathbb{N}\cap[0,|b-a|]$ . On considère le plus grand entier $j$ tel que $d(x,q(s_j)) \leq t$ de sorte que $q(s_{j+1})$ est bien défini. Par conséquent, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq t - d(x,q(s_j)) &< d(x,q(s_{j+1})) - d(x,q(s_j)) \\ &\leq d(q(s_j),q(s_{j+1})) \leq \lambda + c\,. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la propriété de quasirègle nous donne

$$\begin{aligned} d(y,q(s_j)) + t &\leq d(y,q(s_j)) + d(x,q(s_j)) + \lambda + c \\ &\leq d(x,y) + (\lambda + c + 2\tau)\,. \end{aligned}$$

En définitive, si on pose $z=q(s_j)$ et $\alpha_0 = (\lambda+c+2\tau)$, on a montré $d(z,x) \leq t+\alpha_0$ et $d(z,y) \leq d(x,y) - t + \alpha_0$, donc $X$ est $\alpha_0$-faiblement géodésique. On en déduit aussi l'existence d'un $\alpha_0$-milieu de $x,y \in X$ sur une quasirègle. Avec une fonction de choix, on peut donc définir $m: X\times X \to X$ telle que $m(x,y)$ soit un $\alpha_0$-milieu sur une $(\lambda,c,\tau)$-quasirègle. Du coup, on aura aussi $d(x,y) \geq d(x,m) + d(m,y) - 2\tau$ où $m=m(x,y)$.

Montrons (B2). Soient $x,y,z$ trois points de $X$ et $m=m(x,y)$. Par hyperbolicité, on peut supposer $(x|y)_z \geq (x|m)_z - \delta$. Du coup, on a

$$d(y,z) - d(x,y) \geq d(z,m) - d(x,m) - 2\delta$$

et

$$(\star) \qquad \begin{aligned} d(z,m) &\leq d(y,z) - (d(x,y) - d(x,m)) + 2\delta \\ &\leq d(y,z) - d(y,m) + 2\delta + 2\tau\,. \end{aligned}$$

Par suite, si on prend $\alpha = \max\{\alpha_0, 2\delta\}$, alors nous aurons bien

$$d(z,m) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\} + 2\alpha\,,$$

ce qui établit la première partie de (B2).

Pour la seconde partie, on suppose de plus $N > 0$, $d(x,y) > N$, $d(x,z) \leq N$ et $d(y,z) \leq N$. On se fixe $p > 0$, et nous choisissons $N \geq 2(p + 2\delta + 2\tau + \alpha_0)$. Il vient $d(y,m) \geq (1/2)d(x,y) - \alpha \geq N/2 - \alpha_0$ et, en utilisant $(\star)$,

$$d(z,m) \leq \frac{N}{2} + 2\delta + 2\tau + \alpha_0 \leq N - p\,.$$

■

2.2. **Compactifications.** Le bord de Busemann d'un espace métrique propre $(X,d)$ est construit *via* l'application $\Phi : X \to C(X)$ définie par $y \longmapsto d(\cdot, y) - d(x,y)$, où $x \in X$ est un point base arbitraire et $C(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Le théorème d'Ascoli nous assure que $\Phi(X)$ est relativement compacte. La *compactification de Busemann* de $X$ est l'adhérence de l'image $\Phi(X)$ dans $C(X)$ et *son bord* est $\partial_B X = \overline{\Phi(X)} \setminus \Phi(X)$.

Lorsque l'espace est hyperbolique, M. Gromov définit une autre compactification : soit $(X,w)$ un espace hyperbolique propre pointé. On dit qu'une suite $(x_n)$ *tend vers l'infini au sens de Gromov* si $\liminf_{m,n\to\infty}(x_m|x_n)_w = \infty$. Le *bord visuel* $\partial_v X$ de $X$ est l'ensemble des suites qui tendent vers l'infini modulo la relation d'équivalence $(x_n) \sim (y_n)$ si $(x_n|y_n)_w$ tend vers l'infini. En général, $\partial_v X$ est différent de $\partial_B X$.

**Proposition 2.2.** *Soit $(X,w)$ un espace métrique pointé propre, quasiréglé et hyperbolique. On suppose que son groupe d'isométries est cocompact. Si toute suite convergente au sens de Gromov est convergente au sens de Busemann, alors $X$ est fortement bolique.*

Démonstration.— La condition (B2) est vraie par la Proposition 2.1. Nous montrons la condition (B1) par l'absurde. On se fixe $r > 0$ et $\eta > 0$ et on suppose que, pour tout $n > 0$ il existe un quadruplet $x_n, y_n, z_n, t_n$ de points de X vérifiant $d(x_n,y_n) + d(z_n,t_n) \leq r$, $d(x_n,z_n) + d(y_n,t_n) \geq n$ et $d(x_n,t_n) + d(y_n,z_n) \geq d(x_n,z_n) + d(y_n,t_n) + 2\eta$. En faisant opérer le groupe d'isométries, on peut supposer que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ restent dans un compact $K$ contenant $w$, et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(z_n)_n$ et $(t_n)_n$ sont convergentes au sens de Gromov et de Busemann. Du coup, on obtient

$$\Phi(t_n)(x_n) + \Phi(z_n)(y_n) \geq \Phi(z_n)(x_n) + \Phi(t_n)(y_n) + 2\eta,$$

ce qui implique que les limites de $(\Phi(z_n))_n$ et $(\Phi(t_n))_n$ sont distinctes. Or, par hypothèses,

$$d(w,z_n) + d(w,t_n) \geq d(x_n,z_n) + d(y_n,t_n) - (d(w,x_n) + d(w,t_n)) \geq n - 2\mathrm{diam}K$$

donc la suite $((z_n|t_n)_w)_n$ tend vers l'infini puisque $d(z_n,t_n)$ est uniformément bornée. Du coup, les suites $(z_n)_n$ et $(t_n)_n$ tendent vers le même point au sens de Gromov, ce qui devrait impliquer que les suites $(\Phi(z_n))_n$ et $(\Phi(t_n))_n$ ont même limite : absurde. ■

## 3. Marche aléatoire sur un groupe hyperbolique

Un groupe $G$ est *hyperbolique* s'il est de type fini et si l'un de ses graphes de Cayley localement finis est hyperbolique [3].

Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $G$. On considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu$, et on construit la marche aléatoire $(Z_n)_n$ partant d'un élément $x \in G$ comme suit : $Z_0 = x$ et $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$. Notons, pour $x, y \in G$, $F(x, y)$ la probabilité qu'une marche partant de $x$ atteigne $y$. On pose

$$d_G(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} -\log F(x, y)\,.$$

On rassemble les résultats que l'on peut trouver dans [2] qui nous sont utiles (voir Cor. 1.2, Thm. 1.7 et Lma 3.2). La lectrice ou le lecteur averti(e) comprendra qu'il s'agit essentiellement de versions géométriques de résultats d'A. Ancona des années quatre-vingt [1].

**Theorem 3.1.** *Soit $G$ un groupe hyperbolique non élémentaire muni d'une loi de probabilité $\mu$ symétrique dont le support, fini, engendre $G$.*

(1) *Le couple $(G, d_G)$ définit un espace métrique $X$ uniformément localement fini, quasiréglé et hyperbolique.*
(2) *Une suite de $X$ converge au sens de Busemann si elle converge au sens de Gromov.*
(3) *Le groupe $G$ opère sur $X$ par isométries.*

3.1. **Démonstration du Théorème 1.1.** Sous les conditions du Théorème 3.1 et en munissant $G$ de la topologie discrète, les Propositions 2.1 et 2.2 montrent que $G$ opère proprement sur l'espace métrique uniformément fini, faiblement géodésique et fortement bolique $(G, d_G)$. Donc on peut conclure la démonstration du Théorème 1.1 avec le Théorème 1.2. ■

## Références

[1] A. Ancona, Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés, *École d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII—1988*, 1–112, Lecture Notes in Math., 1427, Springer, Berlin, 1990.

[2] S. Blachère, P. Haïssinsky & P. Mathieu, Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups, *Ann Sci. de l'É.N.S.*, accepté.

[3] E. Ghys and P. de la Harpe (éditeurs), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.

[4] P. de la Harpe, Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307**(14) :771–774, 1988.

[5] V. Lafforgue, K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. *Invent. Math.* **149** (2002), 1–95.

[6] I. Mineyev & G. Yu. The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups. *Invent. Math.* **149** (2002), 97–122.

LATP/CMI, Université de Provence, 39 rue Frédéric Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France